Lehr- und Handbuch

der

Holzmesskunde

von

Ferd. L. Langenbacher und **Emanuel A. Nossek,**

Professoren an der Forstlehranstalt in Eulenberg (Mähren).

I. Die Kubierung des Holzes im liegenden Zustande.
II. Die Kubierung des Holzes im stehenden Zustande.
III. Die Bestandesaufnahme.
IV. Holzalter und Holzzuwachs.



Leipzig.
Hugo Voigt
(Paul Moeser).

Die Kubierung

des

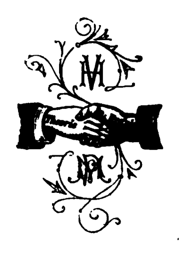
Holzes

im liegenden Zustande

von

Ferd. L. Langenbacher und **Emanuel A. Nossek,**

Professoren an der Forstlehranstalt in Eulenberg (Mähren).



Leipzig.

Hugo Voigt

(Paul Moeser).

1889.

Einleitung.

I. Begriff und Einteilung.

1. Die Holzmesskunde, forstliche Stereometrie oder Holztaxation[1]) ist jener Teil der angewandten Mathematik, welcher sich mit der Ermittlung des Holzgehaltes, Alters und Zuwachses sowohl einzelner Bäume als auch ganzer Bestände beschäftigt.

Die Kubierung des Schnittmaterials und des beschlagenen Holzes gehört, da sie nach den Lehren der reinen Stereometrie bewirkt wird, nicht in den Bereich der Holzmesskunst.

2. Entsprechend der obigen Aufgabe lässt der in einem Lehr- und Handbuch der Holzmesskunde abzuhandelnde Stoff folgende Gliederung zu:

I. Buch. Die Baummessung.
- 1. Teil. Im liegenden Zustande.
- 2. Teil. Im stehenden Zustande.

II. Buch. Die Bestandesmassenaufnahme.
- 1. Teil. Von der Erhebung der Elemente der Bestandesmasse.
- 2. Teil. Von der Erhebung der Bestandesmasse durch Messung.
- 3. Teil. Von der Erhebung der Bestandesmasse durch Schätzung nach Vergleichsgrössen.
- 4. Teil. Von der Erhebung der Zwischennutzungserträge.

III. Buch. Das Holzalter.
- 1. Teil. Altersbestimmung einzelner Bäume.
- 2. Teil. Ermittlung des Bestandesalters.

---

[1]) Pfeil bringt die gesamte Forsttaxation in nachstehende Unterabteilungen:

1. Holzmesskunde oder Holztaxation.
2. Wirtschaftseinrichtung oder Betriebsregelung.
3. Waldwertberechnung.
4. Forstabschätzung behufs des Nachweises einer Walddevastation, und
5. behufs Feststellung der Grundsteuer.

Vergl. hierüber dessen „Forsttaxation in ihrem ganzen Umfange". 3. Aufl. Leipzig 1858.

IV. Buch. Die Lehre von der Ermittlung des Zuwachses.
1. Teil. Am einzelnen Baume.
2. Teil. In ganzen Beständen.

II. Stellung im forstwissenschaftlichen Systeme.

3. Im forstwissenschaftlichen Systeme nimmt die Holzmesskunde eine selbständige Stellung nicht ein. Sie bildet nur einen integrierenden, und zwar sehr wichtigen Teil der Forsteinrichtung, welcher sie alle jene Aufschlüsse über Massengehalt, Alter und Zuwachs der Bestände zu erteilen hat, die für die Beurteilung der Hiebsreife der letzteren und für die Aufstellung der Wirtschaftspläne von Bedeutung sind.

Ferner besorgt die Holzmesskunst einen grossen Teil der notwendigen Vorarbeiten für die Zwecke der Waldwertberechnung, unterstützt die Forstbenutzung bei der Verwertung der Forstprodukte durch genaue Angabe der Quantitätsziffer und dient schliesslich auch dem Waldbau, insofern dieser nur mit ihrer Hilfe zur Erkenntnis des wahren wirtschaftlichen Wertes gewisser waldbaulichen Massnahmen (z. B. Hiebsoperationen u. dgl.) gelangen kann.

III. Geschichtliche Bemerkungen. Litteratur.

4. Die Holzmesskunde hat ihre Entstehung der Erkenntnis zu danken, dass die Grundlagen für den Aufbau der Forstwirtschaftslehre im allgemeinen keineswegs im Wege rein empirischer Beobachtungen gewonnen werden können, dass es vielmehr einer innigen Anlehnung an die Lehrsätze der exakten Wissenschaften bedürfe, um die Gesetze für eine rationelle Bewirtschaftung des Waldes entwickeln und für die Forstwirtschaftslehre selbst den Namen und Charakter einer Wissenschaft beanspruchen zu können.

Bis in die Fünfzigerjahre des vorigen Jahrhunderts ist denn auch die „Holzmessung“ eine ausser Übung stehende Sache und wird, abgesehen von der Einschlichtung des Brennholzes in Setzklaftern von verschiedenen, aber bestimmten Dimensionen, allenthalben durch die „Holzschätzung“ vertreten; doch konnte auch diese bei dem in damaliger Zeit unter den „holzgerechten Jägern“ herrschenden Mangel an mathematischen Kenntnissen nicht zur Blüte und Vollkommenheit gelangen.

Dabei fehlte es aber nicht an Männern, die von der Unzulänglichkeit der damaligen Methoden für die Holzgehaltsbestimmung und

Zuwachsermittlung des Waldes überzeugt waren, und während Beckmann, Baron Werneck, Zanthier u. a. namentlich durch das Streben nach Verfeinerung der okularen Holzschätzung sich Verdienste erwarben, betrat Carl Christoph Oettelt 1765 den allein zum Ziele führenden Weg, indem er die schon damals hoch entwickelte Mathematik in den Bereich des forstlichen Wissens einbezog und unter Anwendung stereometrischer Kenntnisse zur Inhaltsberechnung der Bäume und Bestände schritt. Seine 1765 erschienene Broschüre: „Praktischer Beweis, dass die Mathesis bey dem Forstwesen unentbehrliche Dienste thue“ erlebte schon 1768 eine zweite Auflage, welcher 1786 eine dritte folgte, und wirkte epochal.[1]) Damit war aber auch der eingangs erwähnte bedeutsame Schritt von der rohen Empirie zur Wissenschaft gethan; mathematisch gut geschulte Männer, wie: Pastor Vierenklee[2]), Dr. G. A. Däzel[3]), geh. Oberforstrat C. W. Hennert[4]), Wedell, Wiesenhavern[5]) u. a. übertrugen, dem mächtigen Impulse folgend, die Lehren der reinen Mathematik immer mehr und mehr auf das forstlich-praktische Gebiet und halfen so eine neue forstliche Disziplin begründen, welche uns in Wilhelm Hossfelds „niederer und höherer praktischer Stereometrie“ im Jahre 1812 als wohlgeordnete Wissenschaft entgegentritt.

Von da ab wurde die Holzmesskunde, teils in encyklopädischen teils in monographischen Werken, mehrfach behandelt, und kein anderer Teil der Forstwissenschaft wurde im Verlaufe der letzten fünfzig Jahre mit so viel Methode bearbeitet, als eben die Holzmesskunst; und doch schickt sich unsere Zeit an, noch höhere, namentlich auf dem Gebiete der Ertrags-Ermittlung gelegene Probleme zu lösen. Der Verein deutscher Versuchsanstalten, durch seine einheitliche Organisation zur Lösung hoher Aufgaben berufen, hat den Arbeitsplan zu mannigfachen Untersuchungen, die Deutschlands gesamtes

---

[1]) Vergl. allgemeine deutsche Bibliothek. II. 2. S. 278.

[2]) Vierenklee: „Math. Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie etc.“ Leipzig 1767.

[3]) Däzel: „Praktische Anleitung zur Forstwissenschaft etc.“ München 1786. 1788. 1793.

[4]) C.W. Hennert: „Beyträge zur Forstwissenschaft etc.“ München 1781. 1787.
— — „Anweisung zur Taxation der Forsten“. I. Teil. Berlin 1791. 1803.

[5]) Wiesenhavern: „Anleitung zu der neuen auf Physik und Mathematik gegründeten Forstschätzung und Forstflächen-Einteilung“. Breslau, Hirschberg und Lissa. 1794.

Wäldergebiet treffen sollen, entworfen, und da auch Österreichs Versuchsanstalt einen engen Anschluss an das deutsche Versuchswesen zu finden wusste, so steht zu hoffen, dass durch die gegenseitige Unterstützung auf diesem Felde exakter Forschung neue Grundlagen für die Fortbildung der Holzmesskunst zu gewinnen sein werden, deren hohen Wert niemand leugnen wird, der in das Wesen dieser Wissenschaft Einblick genommen hat.[1])

5. Im nachfolgenden beschränken wir uns darauf, jene Werke zu nennen, die entweder das Gesamtgebiet oder doch grössere Teile der Holzmesskunst behandeln, und behalten uns vor, die einschlägige Journallitteratur sowie die zahlreichen kleineren Monographien am geeigneten Orte in Erinnerung zu bringen.

Wilhelm Hossfeld. Niedere und höhere praktische Stereometrie oder kurze und leichte Messung und Berechnung aller regel- und unregelmässigen Körper und selbst Bäume im Walde, nebst einer gründlichen Anleitung zur Taxation des Holzgehaltes einzelner Bäume und Bestände und ganzer Wälder, besonders für Forstmänner, Baukünstler und Techniker bearbeitet. Leipzig. 1812.

Dr. G. König. Anleitung zur Holztaxation, ein Handbuch für jeden Forstmann und Holzhändler. Gotha. 1813.

— — Die Forstmathematik mit Anweisung zur Forstvermessung, Holzschätzung und Waldwertberechnung, nebst Hilfstafeln für Forstschätzer. Gotha. 1835. Fünfte, wesentlich vermehrte Aufl. von Dr. C. Grebe. 1864.

H. L. Smalian. Beitrag zur Holzmesskunst. Stralsund. 1837.

— — Anleitung zur Untersuchung des Waldzustandes. Berlin. 1840.

J. L. Klauprecht. Die Holzmesskunst. Karlsruhe. 1842. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Ebenda. 1846.

Dr. Carl Heyer. Anleitung zu forststatischen Untersuchungen; verfasst im Auftrage der Versammlung süddeutscher Forstwirte. Giessen. 1846.

— — Die Waldertragsregelung. 3. Auflage von Dr. Gustav Heyer. Leipzig 1840 und 1883.

H. Karl. Ausführliche Abhandlung über die Ermittlung des richtigen Holzbestandesalters etc. Frankfurt a. M. 1847.

---

[1]) Näheres über die Entwicklungsgeschichte der Holzmesskunst siehe in Bernhardts „Geschichte des Waldeigentums, der Waldwirtschaft und Forstwissenschaft in Deutschland. II. und III. Band. Berlin. 1874.

Dr. Friedrich Riecke. Über die Berechnung des körperlichen Inhalts unbeschlagener Baumstämme. Ein Programm, ausgegeben bei Gelegenheit der Jahresprüfung an der königl. württembergischen land- und forstwirtschaftlichen Akademie zu Hohenheim, am 30. August 1849. Stuttgart.

Dr. Theodor Hartig. Vergleichende Untersuchungen über den Ertrag der Rotbuche im Hoch- und Pflanzwalde, im Mittel- und Niederwaldbetriebe, nebst Anleitung zu vergleichenden Ertragsforschungen etc. Berlin. 1847. 1851.

Dr. Gustav Heyer. Über die Ermittlung der Masse, des Alters und des Zuwachses der Holzbestände. Dessau. 1852.

Stahl. Massentafeln zur Bestimmung des Holzgehaltes stehender Bäume nebst Anleitung, den Massengehalt liegender und stehender Bäume, sowie ganzer Bestände zu ermitteln. Berlin. 1852.

M. R. Pressler. Neue holzwirtschaftliche Tafeln. Dresden. 1857. 2. Aufl. unter dem Titel: Forstliches Hilfsbuch für Schule und Praxis nach neuerem Stande der Wissenschaft und Erfahrung in Tafeln und Regeln zur Erleichterung und Vervollkommnung holzwirtschaftlicher und verwandter Rechnungs-, Messungs-, Schätzungs- und Betriebsarbeiten mit besonderer Rücksichtsnahme auf einen national-ökonomisch und forsttechnisch möglichst rationellen Reinertragswaldbau. 1869. Sechste (metrische) Auflage. Berlin. 1874, jetzt Wien, Verlag von Moritz Perles.

Dr. Aug. Draudt. Die Ermittlung der Holzmassen. Giessen. 1860.

Dr. Eduard Heyer. Zur Massenermittlung, Bonitierung und Kritik der Taxationsmethoden. Giessen. 1861.

Dr. F. Baur. Die Holzmesskunde Anleitung zur Aufnahme der Bäume und Bestände nach Masse, Alter und Zuwachs. Wien. 1860. 1874. 1882.

Kohli. Anleitung zur Schätzung stehender Kiefern nach Massentafeln und nach dem Augenmasse. Berlin. 1861.

Carl Breymann. Anleitung zur Holzmesskunst, Waldertragsbestimmung und Waldwertberechnung. Wien. 1868.

Dr. Nördlinger. Der Holzring als Grundlage des Baumkörpers. Stuttgart. 1871.

Alfred Püschel. Die Baummessung und Inhaltsberechnung nach Formzahlen und Massentafeln. Leipzig. 1871.

Max Kunze. Lehrbuch der Holzmesskunst. Berlin. 1873.

— — Anleitung zur Aufnahme des Holzgehaltes der Waldbestände. Berlin. 1886.

Hans Rinicker. Über Baumform und Bestandesmasse. Aarau. 1873.

Ferd. Langenbacher. Forstmathematik. Berlin. 1875.

Gustav Kraft. Beiträge zur forstlichen Zuwachsrechnung und zur Lehre vom Weiserprocente. Hannover. 1885.

A. v. Guttenberg in Loreys Handbuch der Forstwissenschaft. Tübingen. 1887.

I. Buch.

Die Baummessung.

Vorbegriffe.

6. Form des Baumes. Von der Form des Baumes kann wohl im Sinne der Holzmesskunde niemals gesprochen werden, wohl aber von der Form einzelner Teile desselben und zwar in erster Reihe von der Form des Baumschaftes oder Stammes; und selbst bei diesem wichtigsten Bestandteile des Baumes unterscheiden sich, wie weiter unten gezeigt werden wird, einzelne Abschnitte desselben in ihrer Gestalt sehr wesentlich voneinander. Einzelne Astpartien bieten Körper von stereometrischer Form dar.

Denken wir uns den Baum von allem Astwerk befreit, so erhalten wir in dem ganzen übrigbleibenden, sichtbaren (oberirdischen) Teil den Baumschaft oder Stamm. Bei der Fällung des Baumes geschieht jedoch der Abhieb nicht unmittelbar am Erdboden, sondern, je nach Umständen, in einer Höhe von 20—30 cm (wohl auch darüber) und ist sohin in der Regel unter Schaft nur jener Teil des Stammes verstanden, der auf der Abhiebsfläche aufsteht. —

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Querschnittsfläche am Stammende mit dem Wipfelpunkte heisst die Achse des Stammes, und wird durch diese eine schneidende Ebene hindurchgelegt gedacht, so stellt der Schnitt dieser Ebene mit der Oberfläche des Schaftes die Schaftkurve vor. Die Form dieser Kurve bedingt die Form des Stammes, da ja letzterer durch Rotation der Schaftkurve um die Stammachse entstanden gedacht werden kann. Nimmt man nun an, dass die Stämme alle Zwischenformen, die innerhalb des Cylinders und des Neiloides liegen, anzunehmen vermögen, so gilt im allgemeinen

$$y^2 = p\,x^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

als Gleichung der Stammkurve; denn wird für m in 1) der Reihe nach 0, 1, 2, 3 gesetzt, so resultieren die Gleichungen:

$$y^2 = p, \quad y^2 = p\,x, \quad y^2 = p\,x^2 \text{ und } y^2 = p\,x^3 \text{ d. h.}$$

die erste Gleichung entspricht zwei zu beiden Seiten der Achse, zu dieser in gleichen Entfernungen $\pm\sqrt{p}$, parallel gehenden Geraden, durch deren Rotation der Cylinder entstanden gedacht werden kann;

die zweite Gleichung ist die der Apollonischen Parabel, durch deren Umdrehung das Paraboloid entsteht, $y^2 = p\,x^2$ entspricht zwei Geraden, die von einem gemeinschaftlichen Punkte der Achse ausgehen und zur letzteren symmetrisch liegen. Die Umdrehung dieser Geraden um die Achse giebt den gemeinen Kegel. Schliesslich ist $y^2 = p\,x^3$ die Gleichung der Neilschen Parabel (Evolute der Apollonischen Parabel), durch deren Rotation das Neilsche Paraboloid (Neiloid) entsteht. — Cylinder, Paraboloid, Kegel und Neiloid sind gewissermassen die Typen für die Form der Stämme. Untenstehende Figur versinnlicht dieselben in einfachen Strichen.

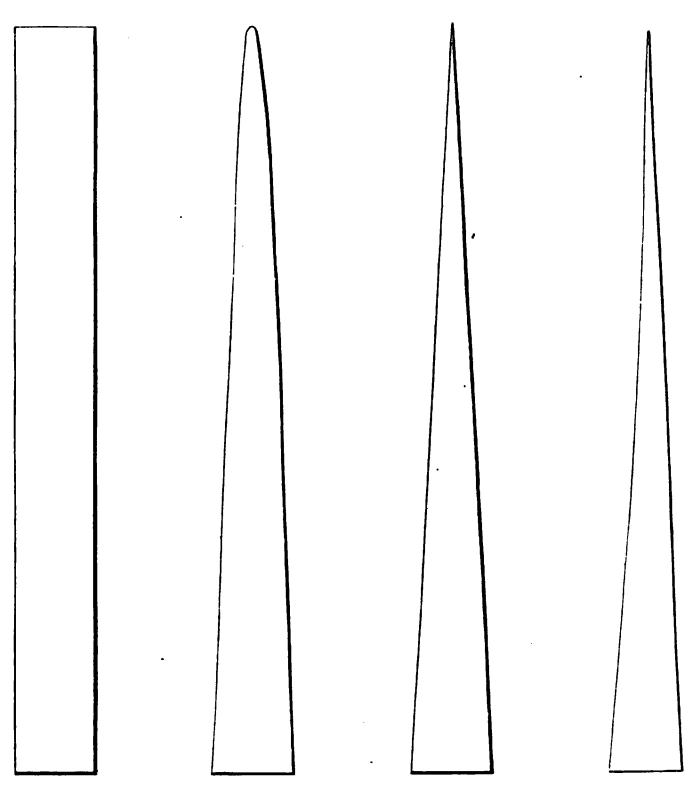


Fig. 1.

Werden in die allgemeine Gleichung . . 1) auch alle Zwischenwerte, die innerhalb der Grenzen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3 liegen, substituiert gedacht, so resultieren daraus die Gleichungen der Schaftkurven für alle Zwischengestalten innerhalb der Typen: Cylinder und Paraboloid, Paraboloid und gemeiner Kegel, Kegel und Neiloid, die

alle nach dem Gesetz der Stammkurvengleichung $y^2 = p\,x^m$ gebildet sind. —

Diese sonst einfache Gleichung begründet, wie man sieht, eine solche Mannigfaltigkeit an Gestalten, dass die Möglichkeit, hierdurch, wenn auch nicht immer ganze Baumschäfte, so doch einzelne Partien derselben in ihrer Form, wohl auch für wissenschaftliche Zwecke genau genug zu bestimmen, begreiflich erscheint. —

Den vorangehenden Ausführungen ist zu entnehmen, dass die Form der Schaftkurve, und sohin auch jene des Stammes, ausschliesslich von dem Exponenten der Abscisse (x) abhängig ist, weshalb diese Zahl mit Fug und Recht die Bezeichnung „Formexponent“ verdient. Kennt man den Formexponenten eines nach diesem Gesetze gestalteten Körpers, so ist man über des letzteren Form ganz im klaren, da diese einfache Zahl mit Bestimmtheit angiebt, innerhalb welcher typischen Gestalten (Cylinder, Paraboloid, Kegel und Neiloid) der fragliche Körper liegt und inwieweit er sich der einen oder der anderen bekannten typischen Form nähert.

Die Form des Stammes wird in der Praxis auch nach dem mehr oder minder raschen Sinken des Schaftdurchmessers gegen obenhin beurteilt und werden demnach vollholzige (vollformige), mittelholzige (mittelformige) und abholzige (abformige) Stämme unterschieden. Denken wir uns aber zwei auf selber Basis (Abhieb) aufstehende, gemein-kegelförmige Stämme von sehr verschiedener Höhe, so wird wahrscheinlich der niedrige Stamm als „abholzig“, der sehr hohe aber als „vollholzig“ angesprochen werden, obwohl beide in ihrer stereometrischen Form vollkommen übereinstimmen, weshalb diese Art der Formschätzuug nur für untergeordnete Zwecke zulässig erscheint.

7. Berechnung des Formexponenten. In Nr. 6 wurde dargethan, dass der Formexponent eine Zahl ist, welche die Form eines Schaftstückes in einer Weise ausdrückt, wie dies vollkommener von einer Zahl nicht erwartet werden kann. Wir werden später bei der Abhandlung der sogenannten „Formzahlen“ sehen, dass die gebräuchlichen Formzahlen in Hinsicht auf Formbestimmung nur wenig, unter Umständen gar nichts leisten, und muss daher dem Formexponenten eine um so grössere Beachtung zugewendet werden. — Die Berechnung des Formexponenten für irgend eine Partie des Schaftes ist übrigens eine ziemlich einfache; denn sind x_1 und x_2 Fig. 2 die Entfernungen, in welchen die das fragliche Schaftstück S begrenzenden Querflächen liegen, und sind die Durchmesser der letzteren durch y_1

und y_2 bestimmt, so ist es klar, dass die Gleichungen $\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 = p\,x_1^m$ [1] und $\left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = p\,x_2^m$ ihre Berechtigung haben. Durch Division dieser Gleichungen ergiebt sich aber $\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{x_1^m}{x_2^m}$ oder $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^m$ oder auch

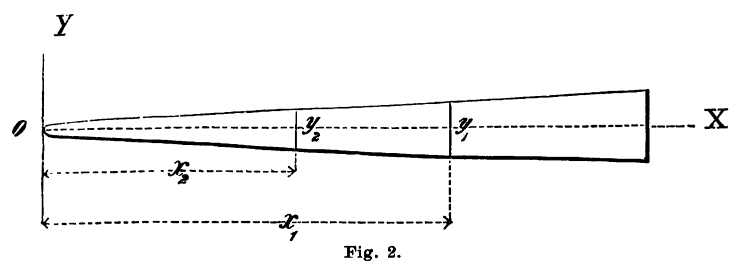


Fig. 2.

$m(\log x_1 - \log x_2) = 2(\log y_1 - \log y_2)$, woraus

$$m = 2\,\frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_1 - \log x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

erhalten wird. Gehört der Durchmesser y_1 der Querfläche G, der Durchmesser y_2 aber der Querfläche g an, so besteht die Gleichung $\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{G}{g}$, daher $2(\log y_1 - \log y_2) = \log G - \log g$ und wir erhalten sonach mit Berücksichtigung von ... 2) für den Formexponenten den Ausdruck:

$$m = \frac{\log G - \log g}{\log x_1 - \log x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Beispiel. Wäre $x_1 = 30{\cdot}1$ m, $x_2 = 15{\cdot}7$ m, $y_1 = 37{\cdot}8$ cm und $y_2 = 27{\cdot}7$ cm, so würde nach einfacher Rechnung unter Zuhilfenahme der Formel ... 2) $m = 0{\cdot}977$ erhalten werden, das fragliche Schaftstück würde also sehr nahe die Form eines Paraboloidstutzes besitzen und nur ein ganz wenig darüber stehen.[2])

Dadurch, dass man den ganzen Schaft je nach seiner Länge oder je nach dem verlangten Genauigkeitsgrade in zwei, drei, vier und mehr Sektionen teilt und für jede dieser Sektionen den Formexponenten

---

[1]) $\frac{y_1}{2}$ und $\frac{y_2}{2}$ deshalb, weil die Ordinaten von der Abscissenachse an zu rechnen sind und daher die Radien des Stammes bedeuten.

[2]) Für die Berechnung des m am Wipfelstücke müsste allenfalls das $x_2 = 1\,m$ genommen und hier das y_2 gemessen werden; die Formel würde dann, wie begreiflich, lauten $m = 2\,\frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_1}$.

bestimmt, bekommt man ein vollkommen klares Bild auch über die Form des ganzen Schaftes. —

Wir hatten an einem 37 m langen Schaftstücke die Untersuchung bezüglich des Formexponenten m derart vorgenommen, dass dabei das 2·9 m lange Wipfelstück ausser Beachtung blieb, von da ab wurden am Schafte 18 gleich lange (1·6 m) Sektionen aufgetragen und für diese sämtlichen Teile die Formexponenten berechnet; das unterste Stück des Stammes (5·3 m) blieb ununtersucht. Wir lassen hier die Resultate der Messung und Berechnung folgen, wollen jedoch, um Missverständnissen aus dem Wege zu gehen, noch einige Bemerkungen voransetzen. Die sämtlichen Erzeugenden (Schaftkurven), denen die 1·6 m langen (und überhaupt die) Schaftstücke angehören, haben ihren Scheitelpunkt im Wipfel des Stammes.

Die Abscissen (x) sind die Entfernungen, in welchen vom Wipfel aus die Messung der betreffenden Durchmesser geschah.

Es wäre von grosser Wichtigkeit, zu wissen, wie der Formexponent an den verschiedenen Stammindividuen wechselt und ob er häufig in so stark differierenden Werten auftritt, wie in dem von uns untersuchten Falle, da erst hierdurch die Zulässigkeit der oder jener Kubierungsmethode der Schäfte mit Klarheit erkannt werden würde.

Allerdings müsste da, um Verlässliches zu schaffen, die Messung mit einer Millimeterkluppe und unter sonstigen gebotenen Vorsichten — am besten durch genaue Ermittlung der Querflächen an den entsprechenden Stammscheiben geschehen.

Wie der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen ist, haben wir auch das ganze Schaftstück in sechs, in drei, in zwei Sektionen geteilt und für jede den Formexponenten und endlich auch das dem ganzen Schaftstück zukommende $m = 1{\cdot}309$ berechnet. (Siehe Tabelle Seite 14.)

Da der Formexponent $m = 0$ dem Cylinder (Walze), $m = 1$ dem Paraboloid, $m = 2$ dem gem. Kegel und $m = 3$ dem Neiloid entspricht, so könnten für die Zwischenstufen folgende Bezeichnungen eingeführt werden und zwar:

für Schäfte, deren $m = 0$ bis 0·5 „unterwalzig“,
$m = 0{\cdot}5$ „ 1 „überparaboloidisch“,
$m = 1$ „ 1·5 „unterparaboloidisch“,
$m = 1{\cdot}5$ „ 2 „überkonisch“,
$m = 2$ „ 2·5 „unterkonisch“,
$m = 2{\cdot}5$ „ 3 „überneiloidisch“.

Zusammenstellung der Formexponenten *m* eines Schaftstückes für 1·6 m, 4·8 m, 9·6 m, 14·4 m lange Sektionen.

Sektion	*x* in Metern	*y* Durchmesser in cm	Formexponent			
			m für 18 Sektionen	*m* für 6 Sektionen	*m* für 3 Sektionen	*m* für 2 Sektionen
0	2·9	7·6				
1	4·5	11·2	1·765			
2	6·1	15·9	2·304	1.919		
3	7·7	19·4	1·708		1·619	
4	9·3	21·7	1·187			
5	10·9	23·2	0·842	1.014		1·496
6	12·6	24·8	0·974			
7	14·1	26·1	0·848			
8	15·7	27·7	1·107	0·942		
9	17·3	28·9	0·874		0·806	
10	18·9	29·7	0·617			
11	20·5	30·6	0·735	0·625		
12	22·1	31·2	0·517			
13	23·7	32·1	0·814			
14	25·3	33·4	1·215	1·111		0·998
15	26·9	34·8	1·339		1·251	
16	28·5	36·4	1·558			
17	30·1	37·8	1·382	1·418		
18	31·7	39·1	1·306			

So wären in der vorliegenden Tabelle die Sektionen 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13 überparaboloidisch, 4, 8, 14, 15, 17 unterparaboloidisch, 1, 3, 16 überkonisch und 2 unterkonisch.

8. Holzsortimente. Die einzelnen Teile eines Baumes haben namentlich ihrer Form und Stärke nach verschiedene Verwendung und verschiedenen Wert; es werden deshalb gleichartige Teile des Baumes immer zu je einem Sortiment vereinigt.

Die Sortimentsbildung ist zu unterscheiden: 1. nach den Baumteilen und 2. nach der Gebrauchsart letzterer.

Da jedoch in diesen beiden Fällen der Willkür bisher Thor und Thür offen standen, namentlich aber vom wissenschaftlichen Standpunkte aus ein einheitliches Vorgehen ganz besonders wünschenswert erschien, so hatte man sich zunächst in Deutschland über die Einführung gleicher Holzsortimente geeinigt und haben die Bevollmächtigten der Regierungen von Preussen, Bayern, Württemberg, Sachsen, Baden und Sachsen-Gotha hierüber Bestimmungen getroffen, welche der Hauptsache nach auch von Österreich (siehe Forstl. Versuchswesen etc. von Dr. A. v. Seckendorff) acceptiert wurden.

Hiernach erfolgt die Sortimentsbildung:

a. In bezug auf die Baumteile:

1) Derbholz ist die oberirdische Holzmasse über 7 cm Durchmesser, einschliesslich deren Rinde gemessen, mit Ausschluss des bei der Fällung am Stocke bleibenden Schaftholzes.

2) Nichtderbholz ist die übrige Holzmasse, welche zerfällt in:
   α. Reisig, die oberirdische Holzmasse von einschliesslich 7 cm Stärke abwärts.
   β. Stockholz, die unterirdische Holzmasse und der bei der Fällung daran bleibende Teil des Schaftes.

b. In bezug auf die Gebrauchsart:

I. Bau- und Nutzholz.

A. **Langnutzholz,** das sind Nutzholzausschnitte, welche nicht in Schichtmassen aufgearbeitet, sondern kubisch vermessen und berechnet werden. Diese sind zu unterscheiden in:

1) Stämme, sind diejenigen Langnutzhölzer, welche über 14 cm Durchmesser haben, bei 1 m oberhalb des unteren Endes gemessen.

2) Stangen, sind solche entgipfelte oder unentgipfelte Langnutzhölzer, welche bis zu 14 cm Durchmesser haben bei 1 m oberhalb des unteren Endes gemessen.[1])

Sie werden unterschieden als:
   α. Dickstangen, über 7 cm bis 14 cm, ein Meter oberhalb des unteren Endes gemessen.
   β. Reisstangen (Gerten) von 7 cm abwärts, ebenfalls 1 m oberhalb des unteren Endes gemessen.

B. **Schichtnutzholz,** das ist in Schichtmasse eingelegtes oder eingebundenes Nutzholz und man unterscheidet:

1) Nutzscheitholz ist in Schichtmasse eingelegtes Nutzholz von über 14 cm Durchmesser am oberen Ende der Rundstücke.

2) Nutzknüppelholz (Prügelholz) ist in Schichtmasse eingelegtes Nutzholz von über 7 cm bis 14 cm Durchmesser am oberen Ende der Rundstücke.

3) Nutzreisig ist in Schichtmasse (Raummeter) eingelegtes oder eingebundenes (Wellen etc.) Nutzholz bis zu 7 cm Durchmesser am unteren (stärkeren) Ende.

---

[1]) Es wird der Durchmesser bei Stämmen und Stangen deshalb nicht am Stammende, sondern 1 m davon entfernt gemessen, weil der Baumschaft am Stammende gewöhnlich abnorme Stärken- und Formenverhältnisse zeigt.

C. **Nutzrinde** ist die vom Stamme getrennte Rinde, soweit sie zur Gerberei oder zu sonstigen technischen Zwecken benutzt wird. Die Eichenrinde ist in Alt- und Jungrinde zu trennen. Für die übrigen Holzarten findet eine solche Trennung nicht statt.

II. Brennholz.

Es sind folgende Brennholzsortimente zu unterscheiden:

1) Scheite, ausgespalten aus Rundstücken von über 14 cm Durchmesser am oberen Ende.
2) Knüppel (Prügel) über 7 cm bis 14 cm Durchmesser am oberen Ende.
3) Reisig bis zu 7 cm Durchmesser am unteren Ende.
4) Brennrinde.
5) Stöcke.

Für jede Holzart sind selbstverständlich die einzelnen Sortimente getrennt zu halten.

9. Das metrische Masssystem. Prinzipiell genommen ist es zwar gleichgiltig, von welcher Masseinheit ausgegangen wird, wenn man nur dieselbe bei einer Arbeit konsequent beibehält; allein der Verkehr in Praxis und Wissenschaft macht ein einheitliches, gemeinverständliches Mass zur unbedingten Notwendigkeit. Diesem Bedürfnisse ist in neuerer Zeit durch die Einführung des neufranzösischen — oder — Metermasses nahezu in allen zivilisierten Ländern genügt worden. In Frankreich besteht dieses Mass seit 1799, in Österreich wurde dessen behördliche Giltigkeit durch das Reichsgesetzblatt vom 2. März 1872 publiziert. Das Meter (oder wie bei uns üblicher: der Meter) ist eine durch Breitegradmessungen auf der Erde gewonnene Masseinheit. welche ursprünglich irrig für $\frac{1}{10000000}$ eines Erdmeridianquadranten gehalten wurde, die sich aber durch nachträgliche Messungen Bessels als der 10 000 859ste Teil desselben herausstellte.

Jede Regierung, welche dieses Mass eingeführt hat, bewahrt einen Urmassstab (Normalmass) in ihrem Archive, und wird dieser niemals zu Messungen selbst, sondern nur zur Abgleichung von Massstäben genommen, welche genauen, wissenschaftlichen Arbeiten zu dienen haben.

Das metrische Mass ist in seinen Ober- und Unterabteilungen im Sinne des Dezimalsystems durchgeführt und sind die Oberabteilungen des Meters durch griechische, die Unterabteilungen durch lateinische Vorsilben ausgedrückt, so dass folgende Bezeichnungen gelten:

$\frac{1}{10}$ Meter = 1 Dezimeter,		10 Meter = 1 Dekameter,
$\frac{1}{100}$ „ = 1 Centimeter[1]),		100 „ = 1 Hektometer,
$\frac{1}{1000}$ „ = 1 Millimeter,		1000 „ = 1 Kilometer,
		10000 „ = 1 Myriameter.

Die gebräuchlichen Abkürzungen für die schriftliche Darstellung sind folgende: Decimeter=dm, Centimeter=cm, Millimeter=mm, Dekameter=dkm, Hektometer = hm, Kilometer = km und Myriameter = mrm.

Denkt man sich Quadrate, welche die angeführten Längenmasseinheiten zu Seiten haben, so hat man bekanntlich die vom Kurrentmasse abgeleiteten Flächenmasseinheiten vor sich. Zu ihrer Bezeichnung werden die Abkürzungen der betreffenden Längenmasseinheiten benutzt, nur wird ihnen die Zahl 2 als Potenzexponent beigesetzt, so dass z. B. für Quadratmeter = m^2, für Quadratcentimeter = cm^2, für Quadratmillimeter = mm^2 etc. zu schreiben ist.

Zur Messung grösserer Flächen bedient man sich der sogenannten Are als Masseinheit. Man kann sich dieselbe als Quadrat von 10 m zur Seite, daher 100 m^2 Inhalt vorstellen. Die abgekürzte Bezeichnung hierfür ist a. Ihre Fläche stimmt mit 1 dkm^2 überein. Durch Ober- und Unterteilung ergiebt sich hieraus:

1 Dekaare (dka)	=	10 a	=	1000 m^2
1 Hektare (ha)	=	100 a	=	10000 m^2
1 Kiliare (ka)	=	1000 a	=	100000 m^2
1 Myriare (mya)	=	10000 a	=	1 000000 m^2
1 Deziare (da)	=	$\frac{1}{10}$ a	=	10 m^2
1 Centiare (ca)	=	$\frac{1}{100}$ a	=	1 m^2
1 Milliare (ma)	=	$\frac{1}{1000}$ a	=	$\frac{1}{10}$ m^2

Von diesen Masseinheiten ist in der Praxis die Hektare die gebräuchlichste. Die Kubikmasseinheiten werden von dem Kurrentmasse ebenso einfach abgeleitet, wie die Flächenmasseinheiten, indem Würfel, zu deren Kantenlängen die betreffenden Längenmasseinheiten gewählt wurden, als Einheiten des Körpermasses gelten. Die Kubikmasseinheiten werden dann abgekürzt ebenso wie die Längenmasseinheiten bezeichnet und wird ihnen die Zahl 3 als Exponent beigesetzt, so dass z. B. Kubikmeter[2]) = m^3, Kubikcentimeter = cm^3 etc. zu setzen ist.

Der Zusammenhang der Körpermasseinheiten ist folgender:

1 dkm^3 = 1000 m^3	1 dm^3 = $\frac{1}{1000}$ m^3
1 hm^3 = 1 000000 m^3	1 cm^3 = $\frac{1}{1000000}$ m^3
1 km^3 = 1 000 000 000 m^3	1 mm^3 = $\frac{1}{1000000000}$ m^3

[1]) Nicht Santimeter in der Aussprache, wie vielfach verbreitet.

[2]) In Deutschland häufig Ster genannt.

Das Hohlmass entspricht dem Kubikmasse, nur muss zur unmittelbaren Messung von Flüssigkeiten, Getreide, Kartoffeln u. dgl. die Masseinheit hohl sein.

Gebräuchlich sind als Flüssigkeits- und Hohlmasse:

der Hektoliter (hl)	entsprechend	100 dm^3
der Dekaliter (dkl)	„	10 dm^3
der Liter (l)	„	1 dm^3
der Deziliter (dl)	„	$\frac{1}{10}$ dm^3
der Centiliter (cl)	„	$\frac{1}{100}$ dm^3

Das metrische Gewicht ist insofern von dem Metermasse abgeleitet, als 1 cm^3 chemisch reines Wasser bei 4° C., wo letzteres seine grösste Dichte erreicht, zum Ausgangspunkte genommen, jene Gewichtseinheit lieferte, die man Gramm (g) nennt.

10 g	geben	1 Dekagramm (dkg)
10 dkg	„	1 Hektogramm (hg)
10 hg	„	1 Kilogramm (kg) = Gewicht von 1 l Wasser
100 kg	„	1 Meterzentner (q) = Gewicht von 1 hl Wasser
1000 kg	„	1 Tonne (t) = Gewicht von 10 hl = 1 m^3 Wasser
$\frac{1}{10}$ g	„	1 Dezigramm (dg)
$\frac{1}{10}$ dg	„	1 Centigramm (cg)
$\frac{1}{10}$ cg	„	1 Milligramm (mg).

Die oben gewählten Abkürzungen für die einzelnen Mass- und Gewichtseinheiten sind, wenige Abweichungen ausgenommen, ganz dieselben, wie sie im Jahre 1879 von der „internationalen Meterkonferenz“ und 1882 von der k. k. Normalaichungskommission angenommen wurden.

Trotz der allgemeinen Verbreitung, welche das Metermass bis nun gefunden, wird dennoch der Forstwirt zuweilen Einheiten des neuen in Einheiten eines alten, bereits aufgelassenen Masssystems, oder umgekehrt zu verwandeln haben. Dies kann vorkommen bei wertvolleren Daten älterer Werke, oder wenn es sich um den Vergleich früherer im alten Masse bestimmten Holzerträge mit den neueren im Metermasse bestimmten handelt, etc. Obwohl nun Umrechnungstabellen in Hülle und Fülle vorhanden sind und jeder bessere Forstkalender solche enthält, so glauben wir dennoch durch Beifügung der Tabelle I, welche den Vergleich der wichtigsten Masseinheiten zulässt, nicht Überflüssiges geboten zu haben.

Verwandlung der Masseinheiten eines Masssystems in solche eines anderen. — Unter Zuhilfenahme der Tabelle I wird es leicht, solche Umwandlungen durch Rechnung vorzunehmen. Es sollen z. B. n österr. Fusse in (x) preussische Fusse verwandelt werden.

Wir hätten da folgende Aufgabe: Wenn 3·1862 preuss. Fuss gleichwertig sind mit 3·1634 österr. Fussen, wie viel preuss. Fusse sind n österr. Fussen gleich?

Daher eine einfache Proportion, die sich aus folgender Aufschreibung unmittelbar ergiebt (siehe Langenbachers Forstmathematik)

3·1862 pr.′ 3·1634 öster.′

x n

$x : 3·1862 = n : 3·1634$ und daher $x = \frac{3·1862}{3·1634} \cdot n$.

In dem Quotienten $\frac{3·1862}{3·1634} = 1·007$ erhalten wir den sogenannten Umwandlungsfaktor, so dass $x = 1·007\, n$.

Bequemer als diese Rechnungsart ist die mittelst geeigneter Tabellen, am bequemsten aber mittelst einfacher logarithmischer Rechenschieber, die wir in der nächsten Nummer, soweit dies hier nötig, behandeln wollen.

10. Logarithmische Rechenschieber. Es ist bekannt, dass die Logarithmen der Potenzen von 10 ganze Zahlen sind, und zwar dass log 10 = 1, log 100 = 2, log 1000 = 3 etc. Wählen wir für die Einheit irgend eine Strecke, so kann uns diese den graphischen Logarithmus von 10 vorstellen. Sei nun in nebenstehender Fig. 3 $ab = 1$, daher = log 10, so können wir zu dem Striche b die Zahl (Numerus) setzen, die diesem graphisch dargestellten Logarithmus entspricht. Ist $bc = ab$, so ist $ac = 2$, somit der graphische Logarithmus von 100, weshalb der Strich bei c mit dem zugehörigen Numerus 100 beziffert werden kann und da log 1 = 0 durch den Anfangspunkt a graphisch dargestellt ist und diesem der Numerus 1 zukommt, so sei auch dieser Punkt mit der ihm zukommenden Zahl 1 bezeichnet.

Legen wir nun einem gutkonstruierten Transversalmassstab die Einheit ab zugrunde, so sind wir in der Lage, mit einem guten Zirkel die aus irgend einer logarithmischen Tafel entnommenen Logarithmen der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 abzugreifen und von a aus auf die Linie ab aufzutragen. Setzen wir zu den Endpunkten dieser graphischen Logarithmen die ihnen zukommenden Numeri, so ergiebt sich in 1, 2, 3 .... 10 die erste oder primäre

logarithmische Teilung. Selbstverständlich können jetzt von *a* aus auch die Logarithmen von 1·1, 1·2, 1·3 . . . 1·9 aufgetragen werden, die dann innerhalb der Striche 1 und 2 der ersten Teilung zu liegen kommen. — Ebenso erhält man die graphischen Logarithmen der Zahlen 2·1, 2·2, 2·3 . . . . 2·9, deren Endpunkte zwischen die Teilstriche 2 und 3 der ersten Teilung fallen müssen. Im selben Sinne kann die Teilung bis zu dem Striche 10 durchgeführt werden, wodurch sich dann die sogenannte zweite Teilung ergiebt. Ebenso wird die dritte Teilung erhalten, wenn man die Logarithmen der Werte 1·11, 1·12, 1·13 . . . . 1·19, ferner 1·21, 1·22, 1·23 . . . . 1.29 etc. von *a* aus aufträgt. Bei grossen Massstäben kann auch noch eine vierte, fünfte etc. Teilung durchgeführt gedacht werden. Wenn es auch des gedrängten Standes der Teilstriche wegen nicht möglich ist, zu jedem der graphisch dargestellten Logarithmen den Numerus anzusetzen, so wird dennoch derjenige, der über die Entstehung dieser logarithmischen Teilung im Klaren ist und einige Übung im Ablesen der zu den graphischen Logarithmen gehörigen Numeri besitzt, darin nicht leicht fehlen.

Es wurden bei Herstellung der logarithmischen Skala von 1 bis 10 (*a* bis *b*) nur Logarithmen mit der Charakteristik Null aufgetragen, also eigentlich die Mantissen dieser Logarithmen; da nun die Mantissen von dem Range des Numerus niemals abhängen, sondern allein von der Zifferngruppe des letzteren, so haben die auf der Strecke *ab* aufgetragenen Mantissen auch für jene Zahlenwerte Geltung, die aus den beigesetzten Numeri durch Multiplikation oder Division mit irgend einer Potenz von 10 entstehen, und wir können daher die Bezifferung der primären Teilung auch in 10, 20, 30, 40 . . . . 100, oder in 100, 200, 300, 400 . . . . 1000 etc., oder in 0·1, 0·2, 0·3, 0·4 . . . . 1, oder in 0·01, 0·02, 0·03, 0·04 . . . . . 0·10 etc. uns verwandelt denken; selbstverständlich müssen dann die Numeri der zweiten, dritten etc. Teilung erhöht oder erniedrigt, d. h. mit derselben Potenz von 10 (10^n oder 10^{-n}) multipliziert werden.

Werden die Logarithmen der Zahlen 20, 30, 40 . . . . . 90 von *a* aus gegen *c* hin aufgetragen, so ist klar, dass in dieser zweiten Skala (von *b* bis *c*) sich die Teilstriche in ganz derselben Weise aneinander reihen müssen, wie dies bei der ersten Teilung der Skala *ab* der Fall gewesen; denn die Logarithmen der Zahlen 20, 30, 40 . . . . . unterscheiden sich von den Logarithmen der Zahlen 2, 3, 4 . . . . . nur durch die Charakteristik 1 (= *ab*) und erscheinen daher dieselben

Mantissen von b gegen c hin aufgetragen, wie sie von a aus zur Herstellung der primären Teilung benutzt wurden.

Selbstverständlich wiederholt sich in der zweiten Skala ebenso die zweite, dritte etc. Teilung, nur müssen die Bezifferungen, die ihren Teilstrichen zukommen, gegen die gleichliegenden Striche der ersten Skala um das 10fache erhöht werden, wie dies bei der primären Teilung der zweiten Skala sich von selbst ergab. — Die diesen Numeri entsprechenden graphischen Logarithmen reichen dann selbstverständlich von a aus bis zu der entsprechenden Bezifferung.

Wie an die erste Skala die zweite, so kann offenbar im selben Sinne an die zweite Skala eine dritte konstruiert werden, die, was die Teilungen betrifft, mit den beiden ersten Skalen vollkommen übereinstimmt, deren Bezifferung jedoch gegen die der ersten Skala verhundertfacht werden müsste, da, um die primäre Teilung der dritten Skala zu erhalten, die Logarithmen der Zahlen 200, 300, 400 . . . . 900 mit dem Endpunkte 1000 von a aus aufgetragen werden müssten.

Denken wir uns nun eine solche Teilung auf einer Metalischiene oder auf einem Holzstabe (oder einem Papierstreifen) ausgeführt, so haben wir einen logarithmischen Rechenstab vor uns, auf welchem unter Zuhilfenahme eines Zirkels multipliziert, dividiert, potenziert und radiziert werden kann.

Man wird dies allsogleich begreiflich finden, sobald man sich der Fundamentalformeln für die Rechnung mittelst Logarithmen erinnert. Bekanntlich sind dies folgende: $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(a:b) = \log a - \log b$, $\log a^n = n \log a$ und $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$. —

Es soll in folgendem die Ausführung der erwähnten vier Rechnungsoperationen mit den in Frage stehenden Hilfsmitteln angedeutet werden:

1. Die Multiplikation. Um das Produkt ab zu erhalten, greife man mit dem Zirkel am logarithmischen Rechenstabe den graphischen Logarithmus der Zahl a ab (also das Stück von 1 bis Numerus a reichend), setze die eine (linke) Zirkelspitze beim Numerus b ein und sehe nach, auf welchen Teilstrich die rechte Zirkelspitze zu stehen kommt; der hier abgelesene Numerus muss offenbar dem Produkte ab entsprechen.

2. Division $(a:b)$. Man greife den graphischen Logarithmus des Divisors b ab und setze die rechte Zirkelspitze in jenen Teilstrich des Rechenstabes, der mit dem Numerus a beschrieben ist.

Die linke Zirkelspitze weist dann auf jenen Numerus hin, der mit dem Quotienten $(a:b)$ identisch ist.

3. Das Potenzieren (a^n). Man greife den graphischen Logarithmus von a ab und trage ihn vom Anfangspunkte (1) des Rechenstabes n mal auf der Skala auf; der Endpunkt der so durchmessenen Strecke trägt die Bezifferung a^n.

4. Das Radizieren $(\sqrt[n]{a})$. Man suche die Bezifferung a und teile den dieser Bezifferung zukommenden graphischen Logarithmus in n Teile. Bei dem Ende des ersten dieser Teile von 1 gegen rechts gehend ist als Numerus $\sqrt[n]{a}$ verzeichnet (daher abzulesen).

Um jedoch den Zirkel entbehrlich zu machen, denke man sich diese logarithmischen Skalen an den zusammenstossenden Kanten zweier dicht aneinander geschobener Lineale angebracht, so dass durch das Verschieben des einen Lineals in der Längsrichtung desselben auch eine gegenseitige Verschiebung der Skalen stattfindet. Es ist klar, dass dann die Multiplikation und Division zweier Zahlen durch einfaches Verschieben der beiden Lineale zu bewerkstelligen ist.

Da es sich für unsern speziellen Zweck bloss um die Umrechnung von Einheiten einer Art in Einheiten einer anderen Art handelt, so brauchte nur das eine Lineal die oben geschilderte logarithmische Teilung zu besitzen, während auf dem anderen Lineale die graphischen Logarithmen der Umwandlungsfaktoren aufgetragen werden müssen. — Der Gebrauch solcher Einrichtungen ist bei Verständnis des Vorstehenden für sich klar. — Die in den Handel gebrachten logarithmischen Rechenschieber bestehen gewöhnlich aus einem Lineal, in dessen oberer Fläche der ganzen Länge desselben nach ein schmales Lineal (Zunge) sich hin- und herschieben lässt. Zunge und Lineal sind durch Falz mit einander verbunden. Durch diese Anordnung werden zwei Paare von dicht aneinander verschiebbaren Kanten gewonnen, die dann je nach dem Zwecke, welchem der Schieber dienen soll, verschiedene logarithmische Teilungen erhalten.

Es würde uns zu weit führen, wenn wir hier auf diese speziellen Bestimmungen der logarithmischen Rechenschieber eingehen sollten; nur soll noch erwähnt werden, dass konzentrische Scheiben eine sehr zweckmässige Form für logarithmische Rechenschieber abgeben und dass wir weiter unten in dem Kapitel über Kubierung von einer ähnlichen Einrichtung, die unter dem Namen „Webers Kubierungskreis“ bekannt ist, Notiz nehmen. — E. Gunter, Prof. in London, konstruierte schon im Jahre 1624 log. Rechenstäbe. Wingate, franz. Mathe-

matiker, erfand 1627 den log. Rechenschieber, der 1657 von dem Engländer Seth Partridge verbessert wurde.

11. Ausgleichungsrechnung. Es kann keinem Zweifel unterliegen, ob der intelligente Forstmann, wenn er sich mit xylometrischen Arbeiten befasst, welche Anspruch auf wissenschaftlichen Wert erheben wollen, in die einfachsten Lehren der Ausgleichungsrechnung eingeweiht sein soll oder nicht, und deshalb sei im folgenden das für diesen Zweck Wissenswürdigste behandelt. Möge die Konstruktion der Instrumente und Behelfe noch so ingeniös und präzise durchgeführt sein, so wird selbst der gewandteste Forstmathematiker trotz Aufgebots der grössten Aufmerksamkeit und Sorgfalt niemals behaupten können, es liessen sich damit absolut richtige Beobachtungen und Resultate erzielen; denn an und für sich Vollkommenes kann aus keiner mechanischen Werkstätte hervorgehen und ebenso sind die Sinne des Beobachters niemals von unfehlbarer Schärfe. — Die Unvollkommenheit der Instrumente und Sinne aber sind nicht die einzigen Quellen, aus welchen unverschuldete Fehler sich ergeben, es nehmen auch andere Umstände, wie Witterung, Beleuchtung, Terrainschwierigkeiten, Disposition des Beobachters etc. mehr oder weniger schädigenden Einfluss auf die Richtigkeit (Genauigkeit) der Arbeit. Die hieraus entstehenden, wenn auch an und für sich geringen Abweichungen von der Wahrheit nennt man „unvermeidliche Beobachtungsfehler", minder bezeichnend auch „zufällige Fehler" und sie sind von den sogenannten „konstanten Fehlern", welche durch einen Mangel des Messbehelfes (z. B. Kluppen mit nicht parallelen Schenkeln, nicht justierte Hypsometer etc.) oder durch äussere gesetzmässig wirkende, daher auch durch Rechnung darstellbare Einflüsse hervorgerufen werden, ebenso zu unterscheiden wie von den sogenannten „groben Fehlern", deren Quellen die Unaufmerksamkeit oder Unfähigkeit des Beobachters sind. — Von der Existenz der unvermeidlichen Fehler gewinnt man aber erst dann eine klare Vorstellung, wenn dieselbe Grösse wiederholt beobachtet (gemessen) wird. Findet man z.B. bei der Messung einer Baumhöhe 25·6 m und bei einer zweiten mit derselben Vorsicht und demselben ganz korrekten Hypsometer ausgeführten Beobachtung 25.2 m, so drängt sich wohl von selbst die Frage auf: Woher diese Differenz von 0·4 m? Die Antwort liegt im vorstehenden.

Schreitet man zu einer dritten, vierten etc. Beobachtung derselben Grösse, so wird man (die Vermeidung grober Fehler vorausgesetzt) lauter mehr oder weniger von einander abweichende (durch

Zufall auch zwei oder einige übereinstimmende) Resultate erhalten, welche alle dieselbe Existenzberechtigung in sich tragen und doch kann dem gemessenen Stamme nur ein Mass zugesprochen werden.

Man ist aber selbstverständlich nicht berechtigt, unter den erhaltenen Zahlen willkürliche Wahl zu treffen; es entsteht hier vielmehr die Aufgabe, bei Aufsuchung des möglichst richtigen Masses alle angestellten Beobachtungen in Rechnung zu ziehen. Nur dann kann von dem Resultate behauptet werden, dass es das erreichbar richtigste sei. — Wie hier vorzugehen ist, lehrt die Ausgleichungsrechnung.

Stellt x den absolut richtigen Wert einer wiederholt mit demselben Mittel und derselben Sorgfalt gemessenen Grösse vor und sind a, b, c, d . . . . . . die dem x entsprechenden n Beobachtungen, so kann, wenn $\doteq$ nahezu gleich bedeutet, gesetzt werden:

$$x \doteq a$$
$$x \doteq b$$
$$x \doteq c$$
$$x \doteq d$$
$$\cdots\cdots$$

$$\text{daher} \quad n\,x \doteq a + b + c + d + \ldots\ldots$$

$$\text{und} \quad x \doteq \frac{a + b + c + d + \ldots\ldots}{n}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

$$\frac{a + b + c + d + \ldots\ldots}{n} = M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

ist aber auch das arithmetische Mittel der gesamten Beobachtungen, und dieses steht, wie Formel 4 zeigt, nahe dem absolut richtigen Werte (x) der wiederholt gemessenen Grösse. Allerdings stehen die Werte a, b, c, d.... dem x auch nahe; ja, es liegen einige davon dem x näher, als dies bei M der Fall ist; der Umstand aber, dass es in der Reihe der Beobachtungen auch solche geben muss, die sich von x mehr entfernen als der Wert M[1]) und weil wir gar keinen Anhaltspunkt zur Beurteilung der Stellung jedes einzelnen Wertes (a, b, c, d etc.) dem wahren Werte x gegenüber besitzen, verleihen eben dem arithmetischen Mittel M die Bedeutung der grössten Verlässlichkeit und

[1]) Bedenkt man, dass M in der Mitte der Werte a, b, c, d . . . . . liegt und dass das x innerhalb oder auch ausserhalb dieser Werte liegen kann, so lehrt eine einfache Vorstellung, dass das M dem x immer näher liegen muss als die Hälfte (un er Umständen auch mehr) der gemachten Einzelmessungen.

ist daher in derartigen Fällen das M als das verlässlichste Mass der beobachteten Grösse anzusehen. —

M ist aber, wie aus dem Vorhergehenden folgt, nicht identisch mit x, denn es besteht die Relation $x \doteq M$, und da x um eine Grösse μ grösser oder kleiner sein kann als M, so folgt die Gleichung $x = M \pm \mu$; die Grösse $\pm \mu$ kann daher als „der Fehler des arithmetischen Mittels" bezeichnet werden.

Sind $\pm \delta_1$, $\pm \delta_2$, $\pm \delta_3$ . . . . . die Fehler der einzelnen Beobachtungen, so ist mit Bezug auf Vorstehendes

$$x = a \pm \delta_1$$
$$x = b \pm \delta_2$$
$$x = c \pm \delta_3$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Durch Addition dieser (n) Gleichungen erhält man:

$$n\,x = a \pm \delta_1 + b \pm \delta_2 + c \pm \delta_3 + \ldots\ldots$$

und hieraus $x = \frac{a + b + c + \ldots\ldots}{n} + \frac{\pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \ldots\ldots}{n}$

oder $x = M \pm \frac{\Sigma(\delta)}{n}$, wenn statt $(\pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \ldots\ldots)$ kürzer $\Sigma(\delta)$ (sprich Summe δ) geschrieben wird.

Aus dieser letzten Gleichung und aus $x = M \pm \mu$ folgt

$$\mu = \frac{\Sigma(\delta)}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

d. h. der Fehler des arithmetischen Mittels ist gleich dem durchschnittlichen Fehler der Einzelbeobachtung.

Wenn daher $\mu = \frac{\pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \ldots\ldots}{n}$, so ist

$$\mu^2 = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots\ldots}{n^2} + \frac{2(\pm \delta_1 \delta_2 \pm \delta_1 \delta_3 \pm \delta_2 \delta_3 \ldots\ldots)}{n^2} \quad \text{und}$$

weil die doppelten Produkte, wegen der beiden Qualitätszeichen, die hier gleichberechtigt sind, sich gegenseitig aufheben[1]), so folgt:

$$\mu^2 = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots\ldots}{n^2}, \text{ oder kürzer}$$

$$\mu^2 = \frac{\Sigma(\delta^2)}{n^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

[1]) In dem Ausdrucke $(\pm \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 \pm \delta_2\delta_3 \pm \ldots.)$ sind alle Kombinationen gleichberechtigt und muss daher ihr arithmetisches Mittel als hier geltend angesehen werden; eine einfache Betrachtung lehrt aber, dass die Summe der sämtlichen Produkte $= 0$, somit auch das arithmetische Mittel daraus $= 0$ sein müsste, weshalb das ganze Glied mit den doppelten Produkten zum Wegfall kommt.

Setzen wir nun den mittleren Fehler der Einzelbeobachtung gleich m, so muss offenbar die Gleichung $n m^2 = \Sigma(\delta^2)$ ihre volle Berechtigung haben, woraus dann $m^2 = \frac{\Sigma(\delta^2)}{n}$ folgt, und mit Berücksichtigung der Gleichung 7, welche auch $\mu^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Sigma(\delta^2)}{n}$ geschrieben werden kann, wird $\mu^2 = \frac{m^2}{n}$ und daher

$$\mu = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

erhalten, d. h. der Fehler des arithmetischen Mittels ist abhängig von dem mittleren Fehler der Einzelbeobachtung und von der Zahl der Beobachtungen. Ersterer (m) hängt namentlich von der Güte des Instrumentes (Behelfes) und der Feinheit der Beobachtung ab. Das n zu steigern, liegt fast immer in unserer Willkür. Die Gleichung 8 sagt aber auch, dass der Fehler des arithmetischer Mittels um so kleiner wird, dass sich das arithmetische Mittel (M) daher um so mehr der Wahrheit (x) nähert, je grösser n ist, d. h. je mehr Beobachtungen angestellt wurden.

Da x unbekannt ist, so sind auch $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ die Abweichungen von der Wahrheit unbestimmbare Grössen; dafür können aber jene Verbesserungen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ berechnet werden, welche an jeder einzelnen Beobachtung ($a, b, c \ldots$) anzubringen wären, um letztere dem arithmetischen Mittel gleich zu machen, und weil x und M sich durch $\pm\mu$ von einander unterscheiden, so muss dieselbe Differenz zwischen den zusammengehörigen δ und v bestehen, so dass

$$\begin{aligned} \delta_1 &= v_1 \pm \mu \\ \delta_2 &= v_2 \pm \mu \\ \delta_3 &= v_3 \pm \mu \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

und da dann die Relationen

$$\delta_1^2 = v_1^2 + 2 v_1 \mu + \mu^2$$

und $\delta_1^2 = v_1^2 - 2 v_1 \mu + \mu^2$ $\Big\{$ als gleichberechtigt bestehen, folglich ihr arithmetisches Mittel

$\delta_1^2 = v_1^2 + \mu^2$ zur Geltung kommt, so muss auch analog:

$$\begin{aligned} \delta_2^2 &= v_2^2 + \mu^2 \\ \delta_3^2 &= v_3^2 + \mu^2 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

richtig sein, und es ergiebt sich durch Summierung der letzten Gleichungen

$$\Sigma(\delta^2) = \Sigma(v^2) + n\mu^2$$

Nach Gleichung 7 ist aber $\mu^2 = \frac{\Sigma(\delta^2)}{n^2}$, daher resultiert unter Benutzung der zuletzt gefundenen Beziehung $\mu^2 = \frac{\Sigma(v^2) + n\mu^2}{n^2} = \frac{\Sigma(v^2)}{n^2} + \frac{\mu^2}{n}$ oder $n\mu^2 = \frac{\Sigma(v^2)}{n} + \mu^2$, woraus

$$\mu^2(n-1) = \frac{\Sigma(v^2)}{n} \quad \text{und} \quad \mu = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n(n-1)}} \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Formel 9 ermöglicht die faktische Berechnung des Fehlers des arithmetischen Mittels *M*.

Die Gleichungen 8 und 9 geben die Beziehung

$$\frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n(n-1)}}, \quad \text{woraus} \quad m = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n-1}} \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

Die Gleichung 10 ermöglicht die Berechnung des mittleren Fehlers der Einzelbeobachtung aus bekannten Grössen.

Beispiel: Mit Faustmanns Spiegelhypsometer wurde die Höhe eines Stammes viermal gemessen und ergaben sich hierbei folgende Beobachtungen:

$$a = 28{\cdot}4 \text{ m}, \; b = 28{\cdot}6 \text{ m}, \; c = 28{\cdot}3 \text{ m} \; \text{und} \; d = 28{\cdot}5 \text{ m}.$$

Das arithmetische Mittel dieser Beobachtungen ist daher

$$M = \frac{28{\cdot}4 + 28{\cdot}6 + 28{\cdot}3 + 28{\cdot}5}{4} = 28{\cdot}45 \text{ m}$$

somit
$$v_1 = M - a = 28{\cdot}45 - 28{\cdot}4 = +0{\cdot}05$$
$$v_2 = M - b = 28{\cdot}45 - 28{\cdot}6 = -0{\cdot}15$$
$$v_3 = M - c = 28{\cdot}45 - 28{\cdot}3 = +0{\cdot}15$$
$$v_4 = M - d = 28{\cdot}45 - 28{\cdot}5 = -0{\cdot}05$$

daher
$$v_1^2 = 0{\cdot}0025$$
$$v_2^2 = 0{\cdot}0225$$
$$v_3^2 = 0{\cdot}0225$$
$$v_4^2 = 0{\cdot}0025$$

und
$$\Sigma(v^2) = 0{\cdot}0500$$

Nach Formel 9 wird gefunden $\mu = \pm\sqrt{\frac{0{\cdot}0500}{4 \times 3}} = \pm 0{\cdot}065$ m

und nach Formel 10 $m = \pm\sqrt{\frac{0{\cdot}0500}{3}} = \pm 0{\cdot}129$ m.

Das aus den vier gemachten Beobachtungen abgeleitete, verlässlichste Mass der Stammhöhe muss hier 28·45 m gelten.

Es weicht dieses Mass von der Wahrheit um $\pm 0{\cdot}065$ m oder 6·5 cm ab; die ganz richtige Höhe ist daher entweder 28·515 oder 28·390.

Die Einzelbeobachtung ist im Mittel auf $\pm 0{\cdot}129$ m oder ca. 13 cm unsicher.

$\frac{m}{M} = \frac{0{\cdot}129}{28{\cdot}45} = \frac{1}{220}$ nennt man das Fehlerverhältnis der einzelnen Messung.

I. Teil.

Die Messung der Bäume im gefällten Zustande.

12. Um den körperlichen Inhalt der Waldbäume zu bestimmen, bedient sich die Holzmesskunst der zur Ermittlung des Körperinhaltes überhaupt gebräuchlichen Methoden, und schreitet demnach teils direkt auf physikalischem, teils indirekt auf stereometrischem Wege zur Kubierung der Waldbäume und ihrer Teile, wobei aber nicht selten ein aus beiden Kubierungsarten kombiniertes Verfahren am schnellsten und sichersten zum Ziele führt.

Handelt es sich um die stereometrische Berechnung des Inhaltes eines Baumkörpers, so wird derselbe, wenn auch nicht in seiner Totalität, so doch in gewissen seiner Einzelteile, als eine den stereometrischen Körpern gleich- oder nahekommende Körperform aufgefasst, deren kubischer Inhalt nach später zu entwickelnden Formeln berechnet werden kann, sobald gewisse Dimensionen derselben als bekannt vorausgesetzt oder gemessen werden können. Für unseren Fall lassen sich diese Dimensionen in Stärke- und Längendimensionen trennen, und wird in den folgenden Kapiteln zunächst das Nötige über die direkte Messung derselben mitgeteilt werden.

1. Kapitel.

Von der Messung der Baumstärken.

13. Bekanntermassen ist der Schaft der Bäume so geformt, dass alle senkrecht auf die Baumachse geführten ebenen Schnitte mehr oder weniger der Kreisform nahekommende Schnittflächen erzeugen, weshalb wir die letzteren vorderhand als Kreisflächen aufgefasst wissen wollen.

Die Fläche eines Kreises ist aber durch den ihm zugehörigen Durchmesser ihrer Ausdehnung nach vollkommen bestimmt, und handelt es sich daher zunächst um Mittel, mit welchen die Durchmesser am Baume gemessen, oder, wie man sich technisch auszu-

drücken pflegt, „abgegriffen“ werden können. Solche Messbehelfe sind:

1) Die Baum-Messkluppen oder Gabelmasse.
2) Der Baumzirkel oder Baumtaster.
3) Das Baum-Messband und
4) die verschiedenen Massstäbe.

1. Die Baum-Messkluppen.

A. Allgemeine Einrichtung und Eigenschaften.

14. Die zum Zwecke der Baumstärkemessung gefertigten Kluppen[1]) bestehen im wesentlichen aus einem mit einer Massein-teilung versehenen Holz- oder Metallstabe (*M*) von prismatischer oder cylindrischer Form (s. Fig. 4), an dessen einem Ende unter einem rechten Winkel ein fixer Schenkel (*S*) so angebracht ist, dass dessen innere Kante in ihrer Fortsetzung den Nullpunkt der Teilung am Massstabe trifft. Ein zweiter, beweglicher Schenkel (S_1) lässt sich mittelst des Gehäuses (*G*) am Massstabe gleitend so hin- und her-bewegen, dass die innere Kante des letzteren mit der Innenkante des

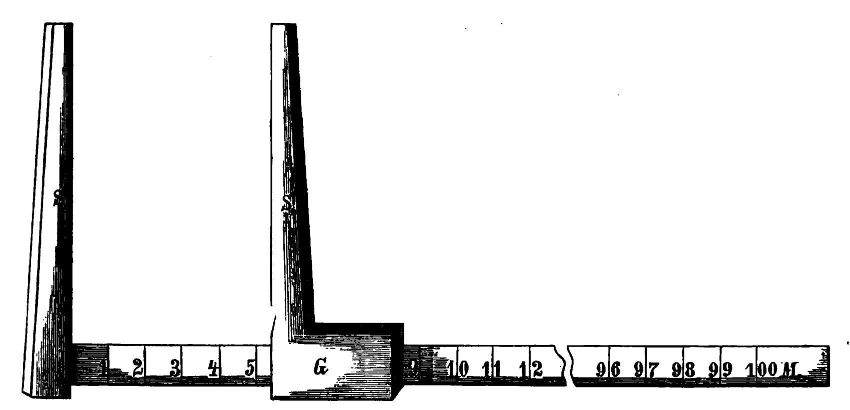


Fig. 4.

fixen Schenkels entweder immer, oder nur im Momente der Funktion parallel ist. Die nutzbare Länge des Massstabes beträgt zumeist 1 m, diejenige der beiden Schenkel dementsprechend etwas mehr als 0·5 m.

15. Die Eigenschaften, welche eine gute Kluppe besitzen soll, sind folgende:

---

[1]) Das Wort „Kluppe“ wurde durch Hossfeld in die Litteratur eingeführt. Vergl. hierüber dessen „niedere und höhere praktische Stereometrie“ S. 58. In einigen Gegenden der österreichischen Alpenländer bedient man sich auch des Ausdrucks „Zange“.

1) Die Kluppe soll so leicht als möglich sein, um den mit ihr Hantierenden nicht allzufrüh zu ermüden, soll aber dennoch jenen Grad von Solidität besitzen, welcher sie befähigt macht, den Händen eines gewöhnlichen Holzarbeiters anvertraut werden zu können.
2) Der bewegliche Schenkel soll sich ohne besonderen Kraftaufwand am Massstabe vor- und zurückschieben lassen und im Momente der Funktion den Parallelismus mit dem fixen Schenkel herstellen.
3) Die Einteilung des Massstabes soll eine richtige und, um ein rasches und sicheres Ablesen möglich zu machen, auch deutliche sein.
4) Das zur Kluppenkonstruktion verwendete Material soll keinen Veränderungen durch Quellen und Schwinden unterworfen sein, weil hierdurch einerseits der leichte Gang der Kluppe und andererseits der Parallelismus ihrer Schenkel alteriert werden würde.
5) Endlich soll der Anschaffungspreis wenigstens für solche Kluppen ein mässiger sein, die nicht für besonders genaue Messungen zu wissenschaftlichen Zwecken in Verwendung kommen.

Um eine Kluppe von den vorgenannten Eigenschaften zu produzieren, genügt es jedoch nicht, derselben die oben dargestellte schematische Form zu geben; die Rücksicht auf das niemals ganz zu vermeidende Quellen und Schwinden des Kluppenholzes macht im Gegenteile die Verwendung verschiedener Behelfe nötig, was aber eine nicht unwesentliche Verschiedenartigkeit der einzelnen Kluppenkonstruktionen involviert.

B. Kluppen-Konstruktionen.

16. Aus der grossen Anzahl der bisher bekannt gewordenen Kluppenkonstruktionen glauben wir nur eine beschränkte Zahl typischer Formen herausgreifen und beschreiben zu sollen, zumal eine detaillierte Beschreibung aller Formen zu weit führen würde und überdies auch zwecklos wäre, weil die Handhabung und Würdigung der Leistungsfähigkeit eines so einfachen Behelfes niemals Schwierigkeiten bereiten kann.

17. a. Die Kluppe von Gustav Heyer und Staudinger. (S. Fig. 5 u. 6.) Diese Kluppe ist aus trockenem Birnbaumholz gefertigt. Der prismatische Massstab (*M*) ist in Centimeter geteilt und zeigt im Quer-

schnitte die Form eines Paralleltrapezes von 46 und 32 mm Seitenlänge und 12 mm Höhe. Das Charakteristische dieser Kluppe ergiebt

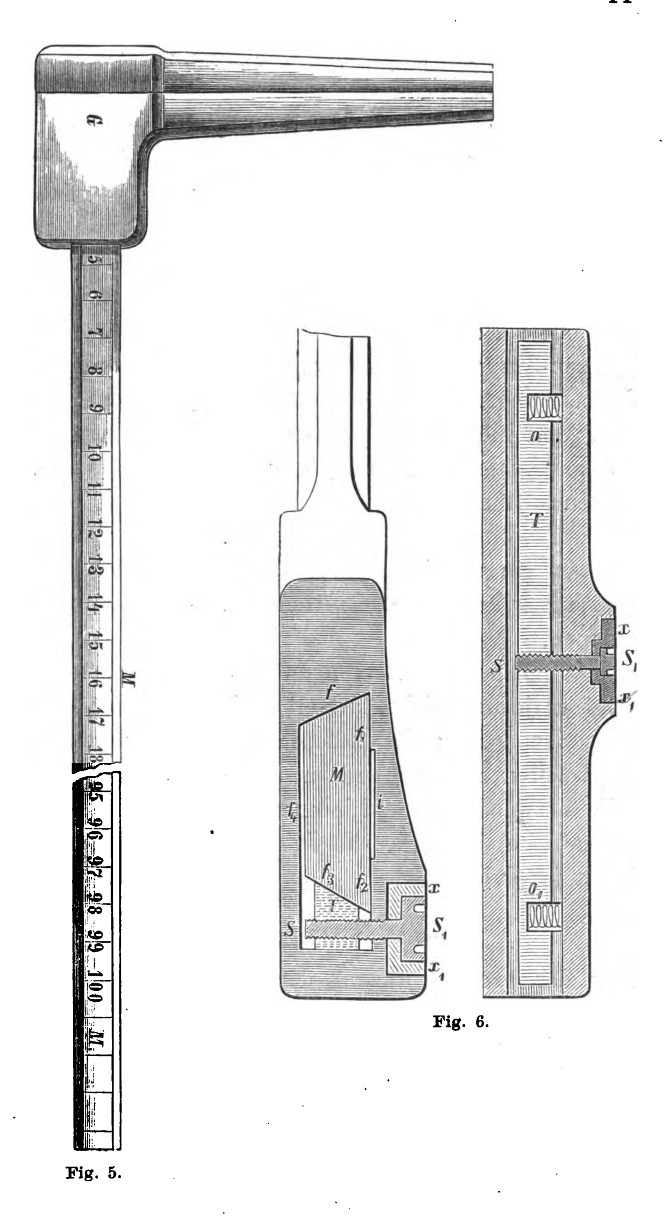


Fig. 5.

Fig. 6.

sich aus der eigenartigen Konstruktion des beweglichen Schenkels, den Fig. 6 im Quer- und Längenschnitte zur Anschauung bringt.

Das Vakuum[1]) des Schenkelgehäuses bietet nicht nur genügenden Raum für die Aufnahme des Massstabes (M), sondern ist gross genug, um im unteren Vakuumraume die Einführung eines aus Messing gefertigten, prismatischen Massstabträgers (T) zu gestatten, welch' letzterer mittelst einer eisernen Schraube (S), deren Kopf (S_1) in einer Messingplatte ($x\ x_1$) eingelassen ist, in der Richtung von S nach S_1 und umgekehrt bewegt werden kann. Der Massstabträger T hat nahezu dieselbe Länge wie das Gehäuse.

Der Massstab hat seine Führung an den Innenwänden des Gehäuses bei f, f_1, f_2 und an dem Träger bei f_3, und kann, da bei f_4 ein Spacium vorhanden ist, die durch Quellen oder Schwinden des Kluppenholzes verloren gegangene angenehme Führung des beweglichen Schenkels am Massstabe durch ein entsprechendes Vor- oder Zurückstellen des Trägers mittelst der Schraube wieder hergestellt werden. Damit der Massstabträger auch den feinsten Bewegungen der Schraube folge, sind in dem Raume $o\ o_1$ in gleicher Höhe mit der Schraubenachse zwei kleine, aber kräftig wirkende Spiralfedern angeordnet, welche mit je einem ihrer Enden in einer cylindrischen Aushöhlung des Trägers ruhen, und sowohl dessen Festklemmen beim Anziehen, wie ein Stehenbleiben desselben beim Lösen der Schraube verhindern. Das Spacium bei i hat die Bestimmung, das Dahingleiten des Schenkels am Massstabe durch Verminderung der Reibung zu erleichtern.[2])

Diese Kluppe, deren Leistungsfähigkeit anerkannt werden muss, ist ebensowohl in vielen Forsthaushalten, wie auch für forstliche Versuchszwecke im Gebrauche. Die Firma: Staudinger & Cie. in Giessen erzeugt dieselbe in 5 Grössen zu folgenden Preisen:

No. I	mit einer nutzbaren Länge des Massstabes von	100 cm	à M. 12.—
„ II	„ „ „ „ „ „ „	80 „	„ „ 10.—
„ III	„ „ „ „ „ „ „	60 „	„ „ 9.—
„ IV	„ „ „ „ „ „ „	50 „	„ „ 8.75
„ V	„ „ „ „ „ „ „	30 „	„ „ 8.50

Andere Teilungen werden bei Mehrarbeit entsprechend berechnet.

---

[1]) Dieser Ausdruck, durch Dr. E. Heyer in die Litteratur eingeführt, ist keineswegs im physikalischen Sinne des Wortes aufzufassen. Vergl. hierüber dessen Broschüre „Über Messung der Höhen sowie der Durchmesser der Bäume im allgemeinen, besonders aber bei forststatichen Untersuchungen". Giessen 1870.

[2]) Sonderbarerweise verlegt Herr Prof. Dr. Baur den Sitz der Spiralfedern nach i und lässt dieselben direkt auf den Massstab wirken. Offenbar müsste durch eine derlei Einrichtung die Führung bei f_1 und f_2 verloren gehen, was der Güte dieser Kluppe Abbruch thun würde. Hierüber vergl. Baur, „Holzmesskunde". 3. Aufl. S. 10.

18. b. **Die Metallkluppe von Staudinger in Giessen** (s. Fig. 7). Da Kluppen mit hölzernem Massstabe der Breite der Teilstriche wegen im günstigsten Falle nur ein scharfes Ablesen auf Millimeter gestatten, für forststatische Untersuchungen aber nicht selten eine bis auf Bruchteile des Millimeters genaue Messung der Durchmesser wünschenswert erscheint, hat der Mechaniker Staudinger in Giessen eine Metallkluppe konstruiert, welche die in der Fig. 7 dargestellte Ausstattung besitzt.

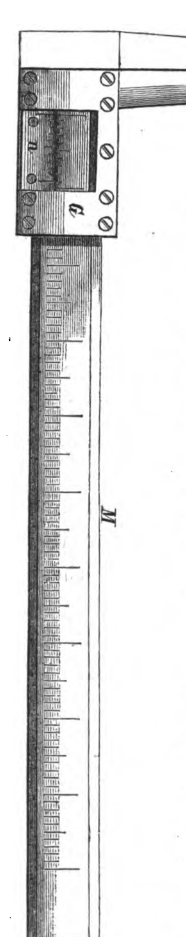


Fig. 7.

Da bei Metallen eine Veränderung der Volumina durch Quellen oder Schwinden nicht in Frage kommt, und überdies auch der Ausdehnungs-Koeffizient derselben für die gewöhnlichen Temperaturgrade ein verschwindend kleiner ist, so kann der Massstab in das Gehäuse des beweglichen Schenkels vollständig genau eingepasst werden, aus welchem Grunde jedwelche Korrektionsvorrichtungen in Form von Trägern etc. entbehrlich sind. Der Massstab (*M*) ist seiner ganzen Länge nach in Millimeter geteilt. Das Gehäuse (*G*), an seiner Vorderseite durchbrochen, nimmt in der so entstandenen Ausnehmung einen unter ca. 35⁰ gegen die vordere Fläche des Massstabes geneigten Nonius auf, wodurch ein genaues Ablesen bis auf 0·1 mm möglich gemacht wird.

Zwecks Verhütung einer allzu raschen Abnützung der Teilung liegt der Nonius mit seiner scharfen Kante nicht am Massstabe auf, sondern ist von diesem durch ein kleines Spacium getrennt. Im übrigen ist die Konstruktion eine so einfache, dass sie ohne weitere Erläuterungen aus der Fig. 7 ersichtlich wird.

19. c. **Die Kluppe von Dr. Eduard Heyer**[1]) (siehe Fig. 8). Diese gleichfalls vom Mechaniker Staudinger in Giessen gefertigte Kluppe zeigt nachstehende Einrichtung.

[1]) Vergleiche Dr. E. Heyer a. a. O., sowie „Allgemeine Forst- und Jagdzeitung". 1861.

Der aus Wildobstholz angefertigte Massstab (M) ist prismatisch dessen Querschnitt sechseckig. Die Führung geschieht an den Innenflächen des Gehäuses bei f_1 und f_2, und an dem zweiteiligen Holzträger bei f_3 und f_4. Die Dimensionen des Massstabes und Trägers einerseits und des Hohlraumes im Gehäuse andererseits sind solche, dass zwischen beiden auch dann noch ein Spacium ($i\,i_1$) bleibt, wenn alles Holzwerk der Kluppe den höchsten Grad des Quellens erreicht hat. In der Mitte des Trägers ist senkrecht auf denselben eine Schraubenmutter (m) aus Messing eingelassen, die eine Eisenschraube aufnimmt, deren Kopf in einer Messingplatte (m_1) ruht. Die mit einem Mikrometergewinde ausgestattete Schraube erlaubt eine sehr feine Verstellung des Trägers, welcher sich, richtig gestellt, in seiner ganzen Länge an den Massstab so anlegt, dass dieser an den Führungsebenen leicht und stetig dahingleitet.

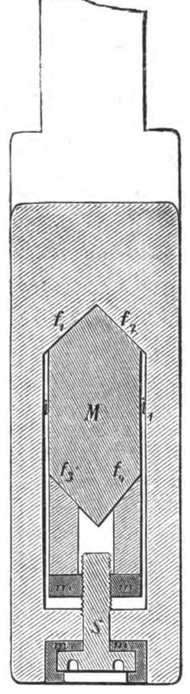


Fig. 8.

20. d. **Die Kluppe von Neuhöfer und Sohn** in Wien.[1]) (Siehe Fig. 9.) Material: Wildobstholz; Massstab: prismatisch wie Kluppe a Der bewegliche Schenkel zeigt folgende Konstruktion: Der Messingträger ($T\,T_1$) ist prismatisch und mit dem Gehäuse von gleicher Länge (130 mm). An der oberen, schief gestellten Begrenzungsebene desselben sind drei Backen b, b_1, b_2 angeordnet, welche als Stützpunkte für zwei bandförmige Stahlfedern (f, f_1) dienen. In der Nähe der beiden Enden ist der Träger gelocht und haben diese beiden Lochungen den Zweck, einerseits einen Schraubenbolzen (s), welcher mit seinem Ende die Feder unterstützt, aufzunehmen, und andererseits die Einführung einer eisernen Schraube (s_1), die mit ihrem Kopfe im Schenkelholze eingelassen ist, mit ihrem Ende aber gleichfalls zu der Feder reicht, zu ermöglichen. Schraube und Bolzen funktionieren als Stellvorrichtung, durch welche der Träger in beliebige Lagen gebracht werden kann.

Die Unterseite des beweglichen Schenkels ist in der Mitte zwecks Aufnahme einer Messingschraube sammt Mutter durchbrochen, welche Schraube direkt auf die untere Fläche des Trägers wirkt und die

[1]) Vergl. „Centralblatt für das gesamte Forstwesen". 1884. S. 561.

bei x und x_1 mit dem Massstabe in Berührung tretenden Federn zu grösserem oder geringerem Drucke gegen den letzteren veranlasst, wodurch der Gang der Kluppe entsprechend geregelt werden kann.

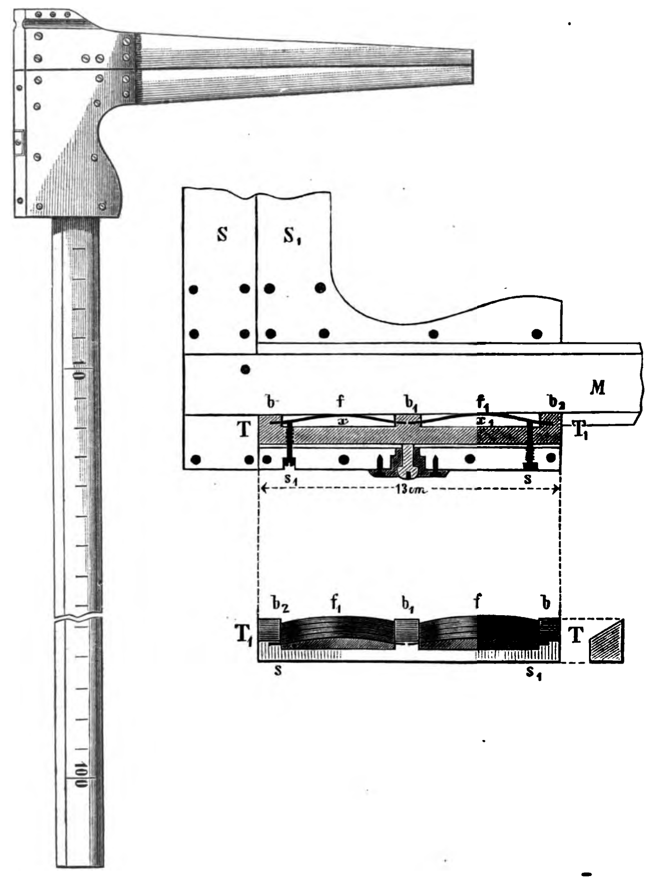


Fig. 9.

Durch die Wirkung der schief gestellten Federn wird der Massstab gleichzeitig nach oben und rückwärts gedrängt, wodurch zwischen der die Teilung tragenden Ebene des Massstabes und der vorderen Wandung des Gehäuses ein Spacium entsteht, welches die Schonung der Teilung bezweckt.

Trotz der sinnreichen Kombination des Trägers mit zwei Federn und der leichten Verstellbarkeit desselben durch Schraube und Bolzen, hat diese Kluppe dennoch den Nachteil, dass sie so wie alle anderen Federkluppen „federt“, d. h. eine Drehung des beweglichen Schenkels

in der Horizontalebene (hierbei ist der Massstab horizontal liegend gedacht) zulässt, was naturgemäss etwas zu kleine Ablesungen zur Folge haben muss. Für forststatische Untersuchungen genügt diese Kluppe daher nicht.

Unseres Wissens hat die Kluppe von Neuhöfer und Sohn namentlich in der Fürst Johann zu Lichtensteinschen Forstregie Eingang gefunden. Bezugsquelle: Neuhöfer und Sohn in Wien I., Kohlmarkt. Preis fl. 6—7, je nach Ausstattung.

21. e. **Die Kluppen von Püschel**[1]**, Friedrich und Handloss.**[2]) Diese drei Kluppenkonstruktionen sind Holzkluppen und namentlich durch die Anordnung eines s. g. gebrochenen Massstabes ausgezeichnet. Der letztere besteht aus zwei Hälften, welche übereinander gelegt und mittelst Feder und Nut verbunden werden. Der wesentlichste Unterschied der in Frage kommenden drei Kluppenkonstruktionen ist in der verschiedenen Form des Falzes gelegen. Der Querschnitt der Nut ist bei Püschels Kluppe (Fig. 11) rechteckig, bei der Friedrichschen (Fig. 12) schwalbenschwanzförmig und zeigt bei der Patentkluppe von

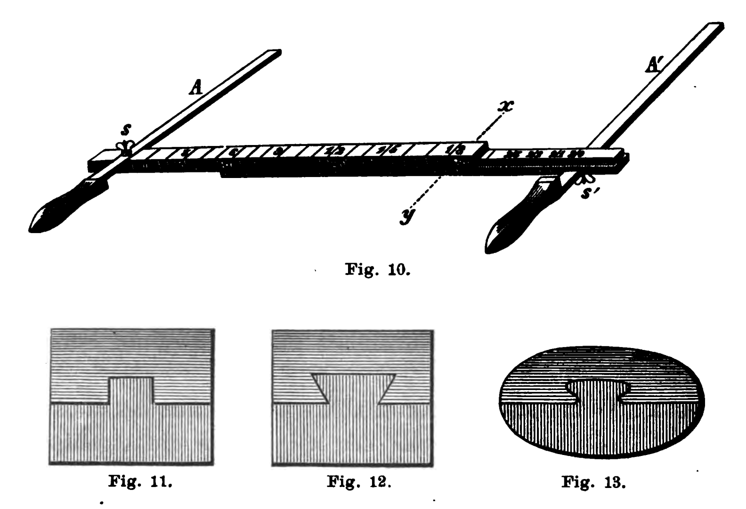


Fig. 10.

Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.

Handloss eine T förmige Gestalt (Fig. 13). Bei Kluppe 2 und 3 sind die Schenkel mit den Massstäben mittelst Holzschrauben fest verbunden; bei der Kluppe 1 hingegen zum Umlegen eingerichtet. Bei letzterer Kluppe werden die beiden Massstäbe, um das Auseinanderfallen derselben zu verhindern, durch drei Messingbänder zusammengehalten.

---

[1]) Vergl. „Allg. Forst- und Jagdzeitung". 1858. Novemberheft.

[2]) Desgl. „Centralblatt für das gesamte Forstwesen". 1875. S. 197.

Die Eigentümlichkeit dieser Konstruktionen bedingt naturgemäss auch eine eigenartige Teilung der Massstäbe. Für eine Kluppe, mit welcher beispielsweise bis 1 m starke Stämme gemessen werden sollen, beginnt die Centimeterteilung in der Verlängerung der Innenkante des am oberen Massstabe befestigten Schenkels und schreitet auf diesem Massstabe bis $\frac{100}{2} = 50$ cm fort. Die restlichen 50 cm sind am unteren Massstabe aufgetragen, und zwar so, das der Ausgangspunkt für diese Teilung (die Marke 50) in der Verlängerung der Innenkante des zweiten Schenkels gelegen ist, von wo ab die Teilung gegen das entgegengesetzte Ende des Massstabes auf der Feder desselben fortschreitet und mit 100 cm abschliesst.

Bei dem Umstande, dass diese Kluppen aus Holz gefertigt sind, und bei der Notwendigkeit, die Verbindung von Feder und Nut des Parallelismus der Schenkel wegen thunlichst passend zu gestalten, pflegt der leichte Gang dieser Kluppen bei feuchter Witterung infolge Quellens sehr leicht verloren zu gehen, und bedarf es dann eines ziemlichen Kraftaufwandes, um das Verschieben der Kluppe zu bewirken. Mit Rücksichtnahme auf diesen Umstand hat der nachmalige k. k. Ministerialrat und Oberlandforstmeister Rob. Micklitz[1]) 1869 die Friedrichsche Kluppe aus Metall anfertigen lassen, die Schenkel mit Handhaben aus Holz versehen und zum Umlegen eingerichtet. Dadurch wird der Gang ein ungemein präziser und von Witterungseinflüssen gänzlich unabhängiger; das Gewicht hingegen ist ein grösseres. (Siehe Fig. 10.)

22. f. **Die Kluppe von Aldenbrück.** Dieser ganz vorzügliche Messbehelf wurde u. W. zuerst vom k. k. Oberforstingenieur, Herrn Josef Friedrich 1876 im Centralblatt für das gesamte Forstwesen beschrieben.

Material: Wildobst- oder Ahornholz. Querschnitt des Massstabes: rechteckig. Das Charakteristische der Kluppe ist die eigentümliche Einrichtung des Gehäuses des beweglichen Schenkels

Bei den von der Firma: Gebrüder Fromme, Mechaniker in Wien, bezogenen Aldenbrückschen Kluppen ist das Gehäuse so eingerichtet, dass die senkrechte Stellung der inneren Kante des beweglichen Schenkels zum Massstabe dann hergestellt erscheint, wenn der Massstab mit dem Flächenstücke *ab* der oberen und der Anschlagkante *c* der unteren Gehäusewandung in Berührung tritt, was dann geschieht, wenn der zu messende Baumstamm die Fortbewegung des

[1]) Vergl. Forst- und Jagdkalender für Österreich. 1869. S. 68.

beweglichen Schenkels in der Richtung nach y hindert und zugleich ein merklicher Druck auf die Handhabe (h_1) dieses Schenkels in gleicher Richtung ausgeübt wird. (Siehe Fig. 14 und 15.)

Wird bei der Öffnung der Kluppe der bewegliche Schenkel in die Lage II gebracht, so entsteht zwischen den Führungsflächen des

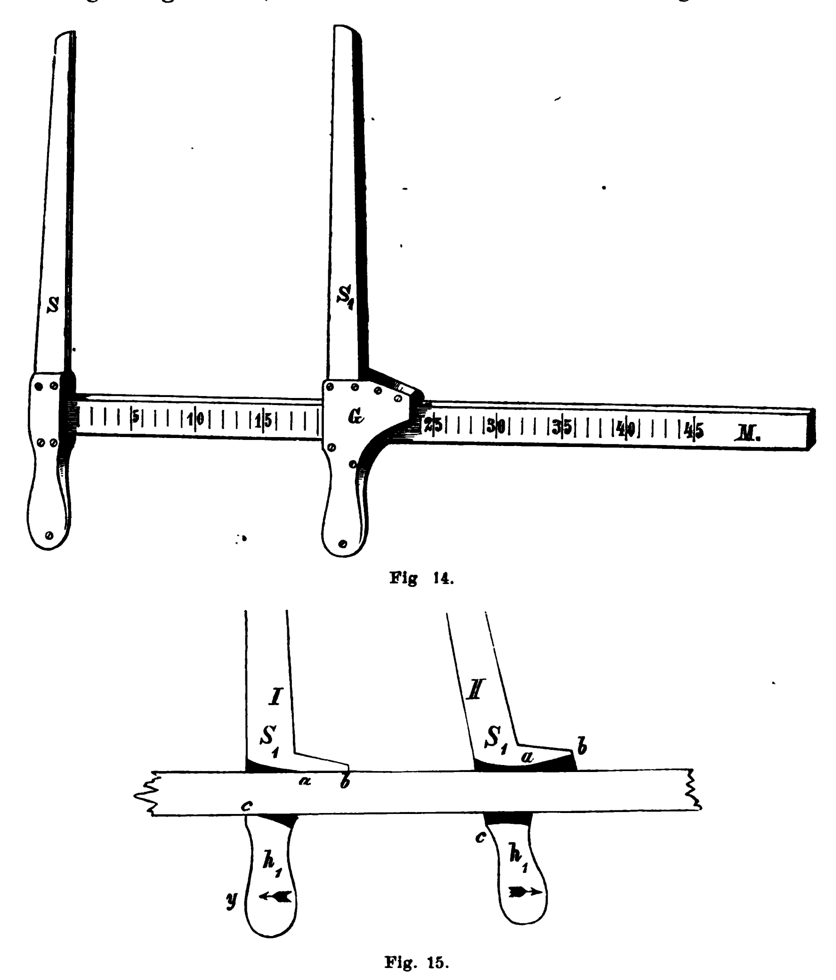


Fig 14.

Fig. 15.

Massstabes und jenen des beweglichen Schenkels ein Zwischenraum, der gross genug ist, um ein ungemein leichtes Zurückschieben des Schenkels am Massstabe zu ermöglichen, was selbst dann leicht zu bewerkstelligen ist, wenn Schnee in das Gehäuse eingedrungen oder eingeflossenes Regenwasser ein bedeutendes Quellen des Holzwerkes verursacht haben sollte.

Sollten das Flächenstück *a b* und die Anschlagkante *c* infolge langen Gebrauches zu sehr abgenützt worden sein, wodurch der Parallelismus der Schenkel alteriert werden würde, so kann dieser Übelstand dadurch leicht beseitigt werden, dass man bei *a*, *b* und *c* durch Einfügung dünner Holz- oder Metallplättchen die ursprüngliche Beschaffenheit dieser beiden Orte wieder herstellt. Überdies pflegen einige Mechaniker das Flächenstück *a b* der oberen Gehäusewand mit einem Plättchen aus Weissbuchenholz zu verkleiden, was die Widerstandsfähigkeit dieses, der Abnützung am meisten unterworfenen Kluppenteiles wesentlich erhöht.

Diese namentlich in den Staats- und vielen Privatforsten Österreich-Ungarns und der Schweiz[1]) in Verwendung stehende Kluppe hat nicht nur den Vorteil grosser Billigkeit[2]) für sich, sondern macht auch vermöge ihrer Eigenart das bei sonst allen Holzkluppen mehr oder weniger unvermeidliche „Federn“ unmöglich. Wir nehmen deshalb auch nicht Anstand, dieselbe für die Bedürfnisse der forstlichen Praxis bestens zu empfehlen.

Die Aldenbrücksche Kluppe wurde bis in die neueste Zeit gemeinhin als Friedrich'sche Kluppe neuerer Konstruktion bezeichnet, was wohl darin seinen Grund haben mag, dass Herr Friedrich diese Kluppe zuerst in unsere Fachlitteratur einführte. Nach neueren durch Prof. Dr. Baur in München eingeleiteten Erhebungen hat jedoch der kgl. preuss. Oberförster Aldenbrück bereits zehn Jahre vor der Friedrichschen Publikation eine ganz gleiche Kluppenkonstruktion ausführen lassen, daher die Priorität der Erfindung dem Oberförster Aldenbrück (gest. 1884) zugeschrieben werden muss. (Vergl. Baurs forstw. Centralblatt. 1886. S. 481 ff.)

23. g. **Die Baummesskluppe mit Registrierapparat und Zählwerk von H. Reuss jun. Patent Reuss-Kraft.** Unter diesem Namen hat Herr Forstmeister Reuss in Dobříš eine Kluppenkonstruktion beschrieben[3]), die im wesentlichen folgende Einrichtung hat.

Eine nach dem Systeme G. Heyer-Staudinger gearbeitete Holz-

---

[1]) Vergl. Fankhauser „Praktische Anleitung zur Bestandesaufnahme mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Wirtschaftseinrichtung in dem eidgenössischen Forstgebiete der Schweiz“. Bern 1884; und dessen Aufsatz in Baur's forstw. Centralblatt. 1883.

[2]) Gebr. Fromme in Wien, III. Wassergasse 17. liefern diese Kluppe je nach Ausstattung zum Preise von ö. W. fl. 3.50—4.50.

[3]) Vergl. H. Reuss jun., „Die Baummesskluppe mit Registrierapparat und Zählwerk zur Erleichterung der Bestandesmassenaufnahme und zur Kontrolle der Nutzholzabpostung“. Prag 1882.

Desgl. Forstmstr. Mühlhausen in Grunert-Borggreve's forstl. Blättern. 1883. S. 120.

kluppe trägt auf dem beweglichen Schenkel einen Registrierapparat und ein Zählwerk, welcher Mechanismus behufs Schutzes vor Staub und Beschädigungen mit einem Blechkästchen bedeckt ist. Der Registrierapparat besteht aus einem in eine feine Spitze endigenden Stifte *a* (siehe Fig. 16 und 17), der mit einer gegen den Kopf desselben wirkenden Spiralfeder in Verbindung steht. Diese Piquiervorrichtung kann durch eine Stellschraube *b* über die ganze Breite des Kluppen-

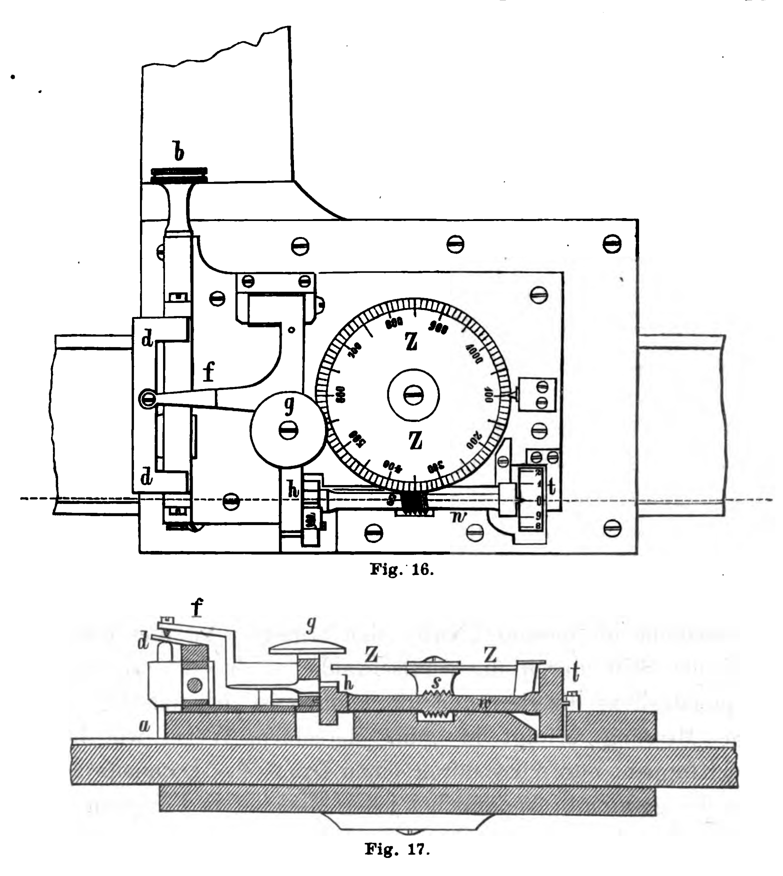


Fig. 16.

Fig. 17.

massstabes vor- und zurückbewegt werden. Eine Platte *d*, die eine dem Bewegungsraume des Stiftes angemessene Grösse hat, lagert einerseits auf dem Kopfe des letzteren und andererseits auf zwei kleinen Trägern, in welche sie eingehängt ist. Auf die Platte *d* wirkt der Druckhebel *f*, so dass ein auf den Knopf *g* ausgeübter Druck auf den Stift übertragen und dieser zum Niedergange veranlasst werden kann. Durch eine in der Figur nicht sichtbare Feder wird der Hebel nach dem

Aufhören des Druckes in seine ursprüngliche Lage zurückgeleitet, wodurch gleichzeitig auch der Stift infolge der Wirkung der Spiralfeder in seine frühere Lage zurückkehrt.

Der Piquierapparat ist durch Anker, Feder und ein mit zehn Zähnen versehenes Steigrad *h* mit dem Zählwerk so in Verbindung gebracht, dass der im Angriffspunkte des Druckhebels angebrachte Anker beim Herabgedrücktwerden das Steigrad um einen Zahn vorwärts schiebt und beim Aufhören des Druckes durch die Feder in den nächstfolgenden Zahn eingedrückt wird. Um ein unbeabsichtigtes Drehen des Steigrades zu verhindern, ist unterhalb desselben eine Federbremse angeordnet, welche das Steigrad Zahn um Zahn passieren muss.

Das Zahnrad selbst ist auf eine Welle aufgekeilt, an deren Ende die Zähltrommel *t* befestigt ist und korrespondierend mit den zehn Zähnen des Steigrades eine Teilung in zehn gleiche Teile zeigt. Ein Schneckengewinde, in der Mitte der Welle angeordnet, überträgt mittelst eines Zählrades die Zehnertouren auf eine Zählscheibe, auf welcher die Zahl der gemachten Touren bis Tausend abgelesen werden kann.

Beim Gebrauche der Kluppe wird zunächst in die an der Oberseite des Massstabes befindliche Nut ein in Centimeter geteilter Papierstreifen eingelegt und mittelst zweier eisernen Zwingen befestigt, wobei auf die richtige Lage des Nullpunktes der Teilung Rücksicht genommen werden muss. Sodann wird der Zählapparat auf Null, d. h. so gestellt, dass sowohl auf dem Index der Trommel als auch auf jenem der Zählscheibe die Lesung „Null“ sich ergiebt. Ist dies geschehen, so wird der Stift durch die Stellschraube nach dem oberen Rand des Papierstreifens dirigiert und die Kluppe ist arbeitsfertig.

Die Messung erfolgt in ganz derselben Weise wie bei den übrigen Kluppen, nur muss durch einen Druck des Daumens auf den Knopf *g* der gesammte Apparat bei jeder Messung in Funktion gesetzt werden; dabei ist darauf zu achten, dass die Kluppenschenkel so lange unter gleich starkem Druck an den zu messenden Stamm gehalten werden, bis die Spitze des Stiftes den Papierstreifen wieder verlassen hat. Das Nichtbefolgen dieser Vorschrift hat in jedem Falle das Zerreissen des Papierstreifens durch den Stift zur Folge.

Nach Vollendung der Kluppierung wird an der Zählscheibe und der Zähltrommel die Ablesung gemacht, das Resultat derselben am Papierstreifen notiert und dieser selbst vom Massstabe abgenommen. Hierauf wird die Anzahl der Piquierlöcher in jeder Stärkestufe er-

mittelt, deren Summe mit der am Kontrollwerk gemachten Ablesung übereinstimmen soll. Dies trifft jedoch zumeist aus dem Grunde nicht zu, weil gleich grosse Durchmesser, wenn auch zu verschiedenen Zeiten gemessen, immer ein und dieselbe Marke am Papierstreifen zurücklassen. Herr Forstmeister Reuss glaubt aber diesen Übelstand dadurch paralysieren zu können, dass er nach je 20—30 Messungen den Piquierstift durch eine halbe Umdrehung der Stellschraube um $^1/_3$ mm vorschiebt, so dass hierauf eine neue Reihe von Marken entsteht. Hierbei soll es noch immer möglich sein, auf einem Papierstreifen 1500 bis 3000 Messungen zu registrieren. Sollte sich aber trotzdem noch eine Differenz zwischen der Ablesung am Papierstreifen und jener am Kontrollwerk ergeben, so können die fehlenden Stämme entweder jener Stärkestufe zugeschrieben werden, welche an und für sich schon die grösste Stammzahl aufweist, oder, was sich besser bewährt haben soll, es werden die fehlenden Stämme mit dem Inhalte des arithmetischen Mittelstammes in Aufrechnung gebracht.

Wie aus der schon oben erwähnten Broschüre des Herrn Forstmeister Reuss zu entnehmen ist, haben die mit der selbstregistrierenden Kluppe vorgenommenen Probemessungen folgende Differenzen zwischen den Ablesungen am Papierstreifen und Kontrollwerk ergeben:

bei 1200	gemessenen	Stämmen;	Differenz	= 19	Stämme	= 1.58%
„ 1606	„	„	„	= 10	„	= 0.63%
„ 614	„	„	„	= 8	„	= 1.29%
„ 500	„	„	„	= 1	„	= 0.20%

Diese Resultate stehen mit den Erwartungen des Herrn Forstmeister Reuss keineswegs im Widerspruche und wird nun abzuwarten sein, welche Erfahrungen diesbezüglich anderwärts werden gewonnen werden.

Der Preis einer solchen Kluppe für eine Stammstärke von 80 cm samt Reservestift und fünf geteilten Papierstreifen beträgt fl. 32. Bezugsquelle: E. Kraft u. Sohn, k. k. landespriv. Mechaniker in Wien, IV., Theresianumgasse.

C. Gebrauch der Kluppe.

24. Soll mittelst einer für die Stärkemessung eingerichteten Kluppe irgend ein Baumdurchmesser gemessen werden, so ist der Stamm an der Messstelle von Moos, anhängenden Rindenstückchen etc. zu reinigen, der fixe Schenkel der Kluppe mit einem Endpunkte des zu messenden Durchmessers in Berührung zu bringen, der Kluppenmass-

stab in eine zur Schaftachse senkrechte Lage zu versetzen und der bewegliche Schenkel so lange gegen den Baumstamm zu bewegen, bis er mit dem zweiten Endpunkte des Durchmessers in Berührung tritt. Die Grösse des Durchmessers kann hierauf am Massstabe direkt abgelesen werden. Es ist jedoch darauf zu achten, dass auf den beweglichen Schenkel niemals ein zu grosser Druck ausgeübt werde, weil sonst, namentlich beim Gebrauche von Federkluppen, zu kleine Ablesungen resultieren müssten. Um das Federn der Kluppe thunlichst zu vermeiden, ist es auch vorteilhaft, den Massstab der Kluppe thunlichst nahe an den Baumschaft heranzubringen.

Bei Kluppierungen, welche längere Zeit währen, sind die Kluppen von Zeit zu Zeit auf ihre Richtigkeit zu prüfen, neue Kluppen aber vor dem Gebrauche insbesondere auf die Genauigkeit der Einteilung des Massstabes aufs sorgfältigste zu untersuchen.

2. Der Baumzirkel.

A. Einrichtung.

25. Der Baumzirkel, auch Baumtasterzirkel genannt, ist eine Erfindung des Förster Kielmann in Hasenfeld[1]), hat aber durch Max R. Pressler eine auf Verbesserung abzielende wesentliche Umgestaltung der ursprünglichen Form erfahren.[2]) In dieser neuen Form besteht derselbe aus zwei mittelst eines Scherengelenkes verbundenen, gebogenen Eisenstäben, die an ihren vorderen Enden mit eisernen Kugeln versehen sind. Im Querschnitte haben die beiden Stäbe, die kurzweg als Schenkel bezeichnet werden, eine parabolische Form[3]), wodurch bei grösstmöglicher Leichtigkeit der höchste Grad von Steifheit zu erzielen ist. Die hinter dem Scherengelenk gelegenen Enden der Zirkelschenkel sind mit schicklichen Handhaben aus Holz versehen. An einem der Schenkel ist oberhalb der Handhabe ein messingener Kreisbogen angebracht, der durch eine Ausnehmung des zweiten Schenkels hindurchgeführt wird und mit einer Einteilung versehen ist, welche den

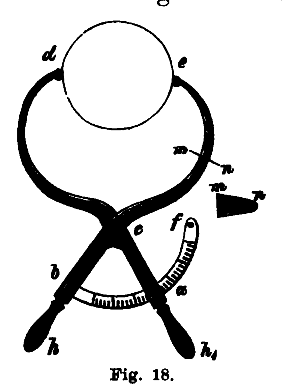


Fig. 18.

[1]) Vergl. allgem. Forst- und Jagdzeitung. 1840. S. 480 und Wedekinds neue Jahrbücher für Forstkunde. 1841. Heft 20, S. 47.

[2]) Desgl. M. R. Pressler, „Neue holzwirtschaftliche Tafeln“. 1857. S. 177.

[3]) Es ist ein entschiedener Irrtum des Herrn Prof. Dr. Baur, wenn derselbe in seiner Holzmesskunde 3. Aufl. S. 20 behauptet, es hätten die Schenkel

direkten Abstand der vorderen Schenkelenden in Centimetern abzulesen gestattet. Eine in die Ausnehmung des zweiten Schenkels führende und hier auf eine Klemmplatte wirkende Klemmschraube macht es möglich, jede beliebig grosse Öffnung des Zirkels längere Zeit festzuhalten. (Siehe Fig. 18.)

B. Gebrauch.

26. Soll der Durchmesser eines Baumes mit dem Baumzirkel gemessen werden, so ist zunächst die Klemmschraube zu lösen. Die beiden Schenkel werden hierauf so weit geöffnet, dass der direkte Abstand ihrer vorderen Enden ungefähr etwas kleiner ist, als der zu messende Durchmesser. Hierauf drückt man den Zirkel an der Messpunktstelle so lange sanft gegen den Stamm, bis die beiden Knöpfchen über die Endpunkte des zu messenden Durchmessers hinweggleiten und zieht denselben ebenso wieder zurück, wobei ein unvorsichtiges Zusammendrücken der Schenkel gegeneinander vermieden werden muss. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass man den Zirkel nur mit einer Hand führt. Die Ablesungen erfolgen am Kreisbogen.

Das im Vergleiche zu einer Holzkluppe grössere Gewicht des Baumzirkels rechtfertigt es, dass derselbe niemals zu bedeutenderer Verbreitung gelangte; zudem erfordern die Messungen auch einen grösseren Zeitaufwand.

3. Das Baummessband.

Einrichtung und Gebrauch.

27. Nachdem die Fläche G eines Kreises nicht nur aus dessen Durchmesser, sondern nach der Formel $G = \frac{U^2}{4\pi}$ auch aus dessen Umfang U berechnet werden kann, so wurde schon im vorigen Jahrhundert das Messband oder Spannmass zum Messen des Baumumfanges benützt.

Dasselbe bestand aus einem mit Firniss überzogenen Pergamentstreifen von ca. 1·5 cm Breite, welcher auf einer Seite die Teilung trug. Behufs leichteren Transportes wurde es in einer Kapsel untergebracht, in welcher es mittelst einer Kurbel oder einer selbstwirkenden Feder um einen Cylinder gerollt werden konnte. Um die Messung des Baumumfanges zu erleichtern, waren an dem, dem Nullpunkte der

---

in ihrer Längenentwicklung eine parabolische Form. Hierdurch liesse sich der oben genannte Zweck durchaus nicht erreichen.

Teilung zunächstliegenden Ende des Bandes zwei eiserne Häkchen angebracht, die den Zweck hatten, in die Rinde des zu messenden Baumes eingedrückt zu werden, worauf das Anlegen des Bandes um den Stamm in bequemer Weise erfolgen konnte.

28. Der Gebrauch des Baummessbandes ist ein sehr einfacher. Die Häkchen desselben werden in der Messpunktshöhe in die Rinde gedrückt und das Messband so um den Stamm gelegt, dass es denselben allseitig enge berührt, worauf das Band längs der Peripherie des zu messenden Querschnittes zum Nullpunkt der Teilung zurückgeleitet wird. Die mit der Teilung versehene Bandseite ist nach innen zu legen.

Das Messband hat gegenüber der Kluppe und dem Baumzirkel allerdings den Vorteil sehr bequemen Transportes voraus, ist aber in Betreff des mit demselben erreichbaren Genauigkeitsgrades den genannten beiden Messbehelfen zu unterordnen, worüber im folgenden Kapitel näheres mitgeteilt werden wird.

4. Die Massstäbe.

29. Die Massstäbe kommen in der Holzmesskunst zum Zwecke der Durchmessermessung nur bei genauen Zuwachsuntersuchungen in Verwendung und wird hierbei vorausgesetzt, dass an der Messstelle aus dem Schafte Scheiben (Baumscheiben) ausgeschnitten werden dürfen. Im Gebrauche stehen:

a. der Scherenmassstab,
b. der prismatische Massstab.

30. a. **Der Scherenmassstab oder die Scheibenkluppe.** (S. Fig. 19.) Dieses Instrument besteht aus einem messingenen Massstabe von 30 cm nutzbarer Länge und paralleltrapezförmiger Querschnittsfigur, deren parallele Seiten bei einem senkrechten Abstande von 5·5 mm 15 und 8 mm messen. Die breitere der beiden parallelen Ebenen des Massstabes ist nach oben gekehrt und trägt eine bis auf 0·5 mm herabreichende Teilung. Auf dem Massstabe (M) ist die Platte A, welche sich nach der einen Seite in den stählernen Schenkel S fortsetzt, mittelst zweier Schrauben befestigt. Am Massstabe befinden sich ferner noch die beiden Schieber B und C, welche längs desselben verschoben werden können. Der der Platte A zunächstliegende Schieber B besitzt gleichfalls einen Stahlschenkel S_1, der ebenso wie der Schenkel S der Platte an der inneren Seite mit einer zugeschärften Kante ausgestattet ist. An seiner Oberseite ist der

Schieber B rahmenförmig durchbrochen und zur Aufnahme eines unter 35° zum Massstabe geneigten Nonius vorgerichtet, dessen Nullpunkt mit dem Nullpunkte der Teilung am Massstabe zusammenfällt,

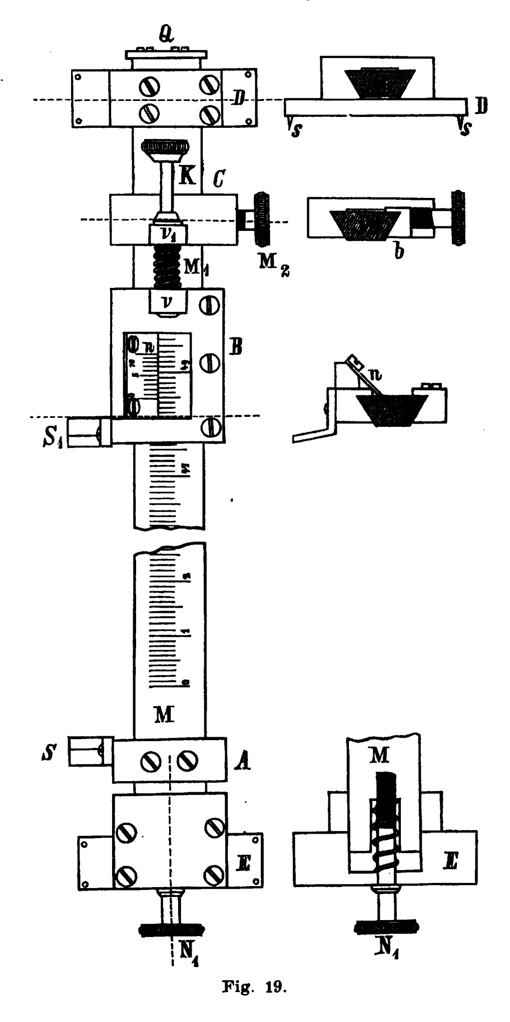


Fig. 19.

sobald die Innenkanten der Schenkel S und S_1 in engste Berührung treten. Die Noniusvorrichtung gestattet eine Ablesung bis auf 0·05 mm.

Im weiteren befindet sich an der Oberseite der Schiebers B der prismatische Aufsatz v, in welchen die Mikrometerschraube M_1 mündet, während ihr glatter Hals durch den ähnlich geformten Aufsatz v_1 des Schiebers C hindurchgeht, um schliesslich in dem Schrauben-

kopf K zu endigen. Eine um die Schraubenspindel geschlungene Spiralfeder bezweckt die Aufhebung des toten Ganges der Mikrometerschraube. An der Rückseite wird der Schieber C von der Klemmschraube M_2 durchbrochen, die beim Anziehen die Klemmplatte b gegen den Massstab presst und ein Feststellen des Schiebers am Massstabe ermöglicht. Ist diese Klemmschraube gelöst, so können die durch die Mikrometerschraube M_1 verbundenen Schieber B und C gemeinschaftlich längs des Massstabes vor- und zurückgeschoben werden, und ist es daher möglich, die Innenkanten der Schenkel S und S_1 über beliebige Punkte zu stellen, welche grobe Einstellung durch die Mikrometerschrauben M_1 und N_1 noch verfeinert werden kann.

Das rückwärtige Ende des Massstabes wird von einer leicht verschiebbaren Schleife D umgeben, die an ihrer Unterseite behufs Fixierung mit vier Stahlspitzen s versehen ist, die in das Holz eingedrückt werden können. Um das Herabgleiten der Schleife D vom Massstabe zu verhindern, schliesst der letztere mit einer vorspringenden Querplatte Q ab.

Das vordere Massstabende steckt in dem Metallprisma E, das so wie die Schleife D an der Unterseite mit Stahlspitzen versehen ist. Überdies befindet sich in diesem Ende des Massstabes die Mutter für die Mikrometerschraube N_1, welche mit ihrem glatten Halse das Prisma E durchdringt und in einem Kopfe endigt. Durch das Anziehen und Lösen dieser Schraube wird, da eine Spiralfeder den toten Gang derselben verhindert, der Massstab M vor- und zurückbewegt. wodurch es möglich wird, den Innenrand des Schenkels S genau über einen bestimmten Punkt zu stellen.

31. Um mittelst des Scherenmassstabes auf einer vorher geglätteten Stammscheibe einen bestimmten Durchmesser zu messen, wird dieser zuvor durch eine scharfgezogene Bleistiftlinie bezeichnet und hierauf das Instrument so auf die Scheibe gestellt, dass die Vorderränder der beiden Schenkel genau in die Bleistiftlinie fallen und überdies der Innenrand des Schenkels S mit dem einen Durchmesserende genau zusammenfällt, was mit Zuhilfenahme einer Lupe und entsprechender Benutzung der Mikrometerschraube N_1 leicht zu bewerkstelligen ist. Hierauf wird die Klemmschraube M_2 geöffnet und werden die beiden Schieber freihändig so weit vor- oder zurückgeschoben, bis der Innenrand des Schenkels S_1 den zweiten Endpunkt des zu messenden Durchmessers nahezu deckt. Sodann wird die Klemmschraube M_2 angezogen, die genaue Einstellung des Schenkels S_1

mittelst der Mikrometerschraube M_1 bewirkt und hierauf die Grösse des gemessenen Durchmessers am Massstabe und Nonius direkt abgelesen.[1])*)

32. b. **Der prismatische Massstab.** Dieser dient nur zu minder genauen Untersuchungen und besteht aus einem Prisma, dessen Querschnitt ein Trapez darstellt. Die schräg gestellte Ebene trägt eine

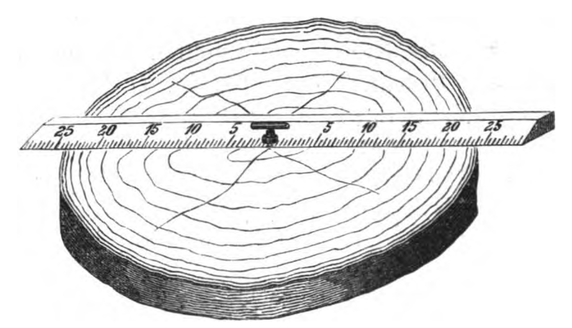


Fig. 20.

bis auf 0·5 mm herabreichende Teilung. Beim Gebrauche legt man den Massstab mit der unteren Ebene auf die geglättete Stammscheibe und misst den fraglichen Durchmesser in ganz gewöhnlicher Weise.

Ist die Teilung des Massstabes so angeordnet, dass dieselbe von einem in der Mitte gelegenen Nullpunkte nach beiden Seiten hin fortschreitet, so kann man, wenn der Nullpunkt genau über die Achse der Stammscheibe gestellt wurde, jeden Radius separat messen, welcher Vorgang in manchen Fällen Vorteile bietet. (S. Fig. 20.)[2])

---

[1]) Ein ganz ähnliches Instrument hat E. Heyer in der schon erwähnten Broschüre „Über Messung der Höhen sowie der Durchmesser etc.“ Seite 73 beschrieben und abgebildet.

*) In neuester Zeit erzeugen C. Staudinger & Cie. Nachfolger in Giessen auch ein Instrument ähnlicher Konstruktion mit Mikroskopeinstellung.

[2]) Vergl. Baur, „Holzmesskunde“. 3. Aufl. S. 434.

2. Kapitel.

Von der Berechnung der Baumquerflächen.

1. Berechnungsmethoden.

33. Wäre die Annahme gerechtfertigt, dass alle senkrecht zur Schaftachse liegenden Schnittflächen der Waldbäume der Kreisform entsprechen, so liessen sich ihre Flächeninhalte nach den für die Flächenberechnung des Kreises aufgestellten Formeln in einfachster Weise berechnen. Bedeutet G die Fläche, D den Durchmesser und U den Umfang eines Kreises, so ist:

$$G = \frac{D^2}{4}\pi = \frac{\pi}{4}D^2 = 0{\cdot}7854\, D^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

$$G = \frac{U^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}U^2 = 0{\cdot}0796\, U^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

34. Schon der blosse Augenschein belehrt jedoch darüber, dass die Baumquerflächen nicht nur von der Kreisform erheblich abweichen, sondern auch untereinander der Form nach sehr verschieden sind. Präziser aber erscheint die Unzulässigkeit der vorstehenden Voraussetzung durch zahlreiche, nach dieser Richtung gepflogene Untersuchungen motiviert, und glauben wir hier zunächst die Forschungsresultate des französischen Physiologen M. Ch. Musset einer Beachtung würdigen zu sollen.

M. Ch. Musset unterbreitete 1867 der französischen Akademie der Wissenschaften in Paris[1]) die Resultate seiner Forschung über den elliptischen Querschnitt der Bäume und gelangte auf Grund von direkten Messungen, welche er an mehreren tausend Bäumen vornahm, zu dem Schlusse, dass alle Baumschäfte in west-östlicher Richtung den grössten und in der Richtung von Norden nach Süden den kleinsten Durchmesser besitzen, welche Erscheinung Musset durch die infolge der Rotation der Erde hervorgerufene Centrifugalkraft zu erklären versuchte.

Für die Zwecke der Holzmesskunst ist es natürlich ganz gleichgültig, ob Musset's Erklärung dieser Erscheinung eine richtige ist oder nicht, oder ob die von Knight, Sachs[2]), Nördlinger[3]),

---

[1]) Vergl. Comptes rendus. 1867. Vol. 65. pag. 424 et 495 und Dr. F. Grundner, „Untersuchungen über die Querflächen-Ermittlung der Holzbestände.“ Berlin 1882.

[2]) Sachs, „Vorlesungen über Pflanzenphysiologie“. Leipzig 1882. S. 703 ff.

[3]) Nördlinger, „Deutsche Forstbotanik“. I. Bd. S. 186 ff. und dessen „Der Holzring als Grundlage des Baumkörpers“. Stuttgart 1872.

Detlefsen[1]), Hugo de Vries[2]) u. a. hierfür gegebenen Erklärungen, welchen zufolge die Exzentrizität der Jahresringe als die Wirkung des verminderten Rindendruckes auf der dem Winde zu- und abgewendeten Seite des Stammes u. dgl. zu betrachten wäre, mehr Glaubwürdigkeit und Berechtigung besitzen; hier handelt es sich nur darum, die Thatsache zu konstatieren, dass die Querflächen der Bäume keine Kreisflächen sind, daher es auch unstatthaft erscheinen muss, die Flächengrösse derselben nach den Formeln 11 und 12 berechnen zu wollen, sobald, wie dies bei wissenschaftlichen Untersuchungen immer der Fall, eine grössere Genauigkeit angestrebt wird. Denn würde man die Querschnittfläche eines Baumschaftes aus ihrem Umfange als Kreis berechnen, so müsste, da bekanntlich der Kreis unter allen ebenen Figuren von gleichem Umfange die grösste Fläche hat, die Baumquerfläche jederzeit zu gross gefunden werden, während die Berechnung als Kreis aus dem grössten oder kleinsten Durchmesser der Querfläche nach Formel 11 das eine Mal ein zu grosses und das andere Mal ein zu kleines Resultat ergeben müsste.

35. Solche Erwägungen mögen wohl auch König geleitet haben, als er den Satz aufstellte: Eine jede Baumquerfläche sei gleich einer Kreisfläche, deren Umfang so gross ist, als der Umfang der Querfläche des Baumes weniger einem Fünftel des Unterschiedes zwischen dem grössten und kleinsten seiner Durchmesser.

$$U_k = U_q - \frac{D - d}{5}$$

Nachdem aber mit Ausnahme des Kreises der Umfang keiner anderen Rundfläche eine Funktion der Durchmesser ist, so ist leicht einzusehen, dass diese Königsche Näherungsformel jeder Bedeutung bar zu erklären ist.

36. Zu wesentlich wertvolleren Resultaten führten die komparativen Untersuchungen, welche Schmidtborn 1863 behufs Auffindung einer Formel zur Berechnung der Querflächen der Baumschäfte angestellt hat.[3])

Derselbe wählte als Untersuchungsobjekte zwölf mehr oder

---

[1]) Detlefsen, „Über das Dickenwachstum cylindrischer Organe" in den Arbeiten des botan. Instituts in Würzburg. II. Bd. S. 18 und dessen „Versuch einer mechanischen Erklärung des exzentrischen Dickenwachstums verholzter Achsen und Wurzeln". Wismar 1881.

[2]) Hugo de Vries, „Über den Einfluss des Rindendrucks auf den anatomischen Bau des Holzes" in Flora. 1875. No. VII.

[3]) Vergl. Allg. Forst- und Jagdzeitung. 1863. S. 408—413.

Tabellarische Zusammenstellung der

Der untersuchten

Bezeichnung	Holzart	Durchmesser		Umfang	Flächeninhalt nach						
		grösster D	kleinst. d	U	von Simpson	1. $G=D^2 \cdot \frac{\pi}{4}$	Fehler	2. $G=d^2 \cdot \frac{\pi}{4}$	Fehler	3. $G=\frac{\pi}{8}(D^2+d^2)$	Fehler
		Zolle			Quadratfuss		%	Quadratf.	%	Quadratf.	%
I.	Kirsche	8.500	7.800	25.80	0.520 212	0.567 450	+ 9.00	0.477 836	— 8.14	0.522 648	+ 0.46
II.	Birke	10.925	9.850	32.85	0.836 527	0.937 430	+12.10	0.762 018	— 8.91	0.849 721	+ 1.57
III.	Kiefer	15.300	13.670	45.90	1.632 474	1.838 500	+31.10	1.464 290	—26.60	1.651 395	+ 1.14
IV.	Weymutskiefer	9.150	8.800	28.45	0.629 350	0.657 555	+ 4.16	0.608 212	— 3.36	0.632 883	+ 0.56
V.	Lärche	7.100	6.350	21.15	0.343 744	0.395 919	+15.50	0.316 692	— 7.84	0.356 305	+ 3.65
VI.	Lärche	6.350	5.550	19.10	0.267 458	0.316 692	+18.40	0.241 922	— 9.54	0.279 307	+ 4.43
VII.	Buche	16.100	15 200	49.20	1.924 106	2.035 800	+ 5.81	1.814 600	— 5.69	1.925 200	+ 0.05
VIII.	Tanne	15.950	15.150	48.85	1.893 144	1.998 072	+ 5.54	1.802 660	— 4.78	1.900 366	+ 0.38
IX.	Eiche	20.000	17.500	58.70	2.674 100	3.141 600	+17.40	2.405 300	—10.40	2.773 450	+ 3,71
X.	Schwarzkiefer	14.300	13.100	43.10	1.445 691	1.606 100	+11.10	1.347 800	— 6.77	1.476 950	+ 2.17
XI.	Fichte	13.600	12.850	41.70	1.311 863	1.452 700	+10.70	1.296 825	— 1.14	1.374 762	+ 4.79
XII.	Weissbuche	10.100	8.950	30.65	0.687 278	0.801 190	+16.50	0.629 124	— 8.44	0.705 157	+ 4.05

weniger unregelmässig geformte Querschnitte (Baumscheiben) verschiedener Holzarten, deren Fläche, um einen thunlichst genauen Ausgangspunkt für die Untersuchung zu gewinnen, zunächst nach der Simpsonschen Regel:

$$G = \frac{x}{3}\left[(y_1 + y_{2n+1}) + 4\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n}) + 2\,(y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1})\right]$$

und im weiteren auch durch Wägung in der Weise bestimmt wurde, dass man die genaue Form der Querschnitte zunächst auf feines Zeichenpapier übertrug und mittelst eines scharfen Messers ausschnitt, worauf durch Wägung auf einer analytischen Wage das Gewicht (Q) der ausgeschnittenen Querschnittfigur aufs genaueste bestimmt wurde. Damit aber aus dem Gewichte auf den Flächenraum geschlossen werden konnte, wurde durch mehrfache Wägung das durchschnittliche Gewicht (q) eines Quadratzolles desselben Papiers bestimmt und die Flächengrösse der Querschnittfigur nach Formel:

$$G = \frac{Q}{q}$$

Schmidtborn'schen Untersuchungs-Resultate.

Stammscheiben

der Formel				Beliebige, aber zu einander senkrecht stehende Durchmesser $\left\{\begin{matrix}D\\d\end{matrix}\right.$	Flächeninhalt nach der Formel					
4. $G=\frac{\pi}{16}(D+d)^2$	Fehler	5. $G=\frac{\pi}{4}D.d$	Fehler		6. $G=\frac{\pi}{16}(D+d)^2$	Fehler	7. $G=\frac{\pi}{4}D.d$	Fehler	8. $G=\frac{U^2}{4\pi}$	Fehler
Quadratf.	%	Quadratf.	%	Zolle	Quadratf.	%	Quadratf.	%	Quadratf.	%
0.521 681	+ 0.28	0.520 200	— 0.02	8.5 7.7	0.515 300	— 0.94	0.514 043	— 1.18	0.5207	+ 1.82
0 847 364	+ 1,29	0.845 176	+ 1.08	10.9 9.9	0.849 490	+ 1.55	0.847 523	+ 1.31	0.8588	+ 2.66
1.647 358	+ 0.93	1.642 668	+ 0.61	15.1 13.8	1.639 950	+ 0.44	1.636 612	+ 0.24	1.6765	+ 6.92
0.632 663	+ 0.52	0.632 402	+ 0.48	9.0 9.1	0.643 261	+ 2.21	0.643 241	+ 2.20	0.6442	+ 2.35
0.355 201	+ 3.38	0.354 097	+ 3.01	6.9 6.4	0.347 323	+ 1.04	0.346 882	+ 0.89	0.3560	+ 3.57
0.278 052	+ 3.96	0.276 894	+ 3.52	6.0 5.5	0.259 672	— 2.91	0.259 181	— 3.09	0.2903	+ 8.52
1.923 616	— 0.02	1.922 266	— 0.09	16.0 15.4	1.935 900	+ 0.61	1.935 221	+ 0.57	1.9263	+ 0.11
1.899 110	+ 0.31	1.897 856	+ 0.24	16.0 15.3	1.923 600	+ 1.60	1.922 655	+ 1.55	1.8992	+ 0.32
2.761 160	+ 3.25	2.748 895	+ 2.34	20.0 18.0	2.835 290	+ 6.02	2.827 440	+ 5.73	2.7420	+ 2.54
1.474 100	+ 1.97	1.471 287	+ 1.77	14.3 13.2	1.484 890	+ 2.62	1.482 521	+ 2.54	1.4782	+ 2.24
1.373 666	+ 4.71	1.372 561	+ 4.62	13.3 13.2	1.378 860	+ 5.11	1.378 845	+ 5.10	1.3838	+ 5.47
0.712 557	+ 3.67	0.709 960	+ 3.30	9.6 9.5	0.716 303	+ 4.28	0.716 283	+ 4.22	0.7476	+ 8.77

also durch Division des Gewichtes eines Quadratzolles Papier in das Totalgewicht Q der auf Papier übertragenen Querschnittfigur gefunden.

Hierauf ermittelte Schmidtborn für jede einzelne Querfläche den grössten und kleinsten Durchmesser und berechnete den Flächeninhalt nach folgenden verschiedenen Methoden:

1. Als Kreisfläche aus dem grössten Durchmesser der Querfläche nach Formel 11;
2. als Kreisfläche aus dem kleinsten Durchmesser der Querfläche nach Formel 11;
3. als eine Kreisfläche, welche als das arithmetische Mittel jener beiden Kreisflächen resultiert, die sich aus dem grössten und kleinsten Durchmesser konstruieren lassen, nach Formel

$$G = \frac{\pi}{2}\left(\frac{D^2 + d^2}{4}\right) = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2) = 0{\cdot}3927\,(D^2 + d^2) \quad . \; . \quad 13)$$

Gemeinhin pflegt man diese Art der Berechnung als jene „nach den verglichenen oder geglichenen Kreisflächen“ zu bezeichnen.

4. als Kreisfläche aus dem arithmetischen Mittel des grössten und kleinsten Durchmessers der Querfläche, d. h. „nach verglichenen Durchmessern“ nach der Formel

$$G = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{16}(D+d)^2 = 0{\cdot}1964\,(D+d)^2 \quad \ldots \; 14)$$

5. als Fläche einer Ellipse aus dem geometrischen Mittel des grössten und kleinsten Durchmessers (Achsen) der Querfläche, nach Formel

$$G = \frac{\pi}{4}\sqrt{(D\,d)^2} = \frac{\pi}{4}D\,.\,d = 0{\cdot}7854\,D\,.\,d \quad \ldots\ldots \; 15)$$

6. als Kreisfläche aus dem arithmetischen Mittel zweier beliebigen, jedoch senkrecht zu einander gemessenen Durchmesser nach Formel 14.
7. als Fläche einer Ellipse aus zwei beliebigen, aber senkrecht zu einander gemessenen Durchmessern nach Formel 15, und endlich
8. als Kreisfläche aus dem gemessenen Umfange der Querfläche nach Formel 12.

Nach Vollzug dieser Arbeiten wurden unter der Voraussetzung, dass aus der Flächenberechnung nach der Simpsonschen Regel die relativ richtigsten Resultate hervorgingen, die prozentualen Fehler festgestellt, die unter Befolgung jedes einzelnen dieser Berechnungsverfahren begangen wurden, und ergab sich endlich aus der Vergleichung der Fehlerprozente, dass die Berechnung nach Formel 15 die der Wirklichkeit am nächsten stehenden Resultate gewinnen liess. Schmidtborn ist demnach der Ansicht, dass die Berechnung der Baumstämme am richtigsten nach Formel 15 bewirkt werden könne. (Siehe umstehende Tabelle.)

Im übrigen fällt es nicht schwer, die Grössen zu ermitteln, um welche die nach den Formeln 13, 14 und 15 für eine und dieselbe Baumquerfläche gefundenen Flächeninhalte variieren müssen.

Nach Formel 13 ist $G = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2)$

nach Formel 14 hingegen $G = \frac{\pi}{16}(D+d)^2$

und die Differenz $\triangle$ dieser beiden Werte für G ist demnach:

$$\triangle = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2) - \frac{\pi}{16}(D+d)^2$$

$$\triangle = \frac{\pi}{16}(2\,D^2 + 2\,d^2) - \frac{\pi}{16}(D^2 + d^2 + 2\,D\,d)$$

$$\triangle = \frac{\pi}{16}\,D^2 + d^2 - 2\,Dd) = \frac{\pi}{16}(D-d)^2$$

d. h. die Differenz $\triangle$ ist gleich dem Viertel jener Kreisfläche, die sich mit dem Durchmesser $(D-d)$ konstruieren lässt.

Nach Formel 15 ist ferner

$$G = \frac{\pi}{4} D \,.\, d.$$

Im Entgegenhalte zu Formel 13 ist sonach

$$\triangle = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2) - \frac{\pi}{4} D \,.\, d$$

$$\triangle = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2) - \frac{\pi}{8} \,.\, 2\, D d$$

$$\triangle = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2 - 2 D d) = \frac{\pi}{8}(D-d)^2,$$

wonach die Differenz der nach den Formeln 13 und 15 für G gefundenen Werte gleich ist der Hälfte jener Kreisfläche, welche dem Durchmesser $(D-d)$ entspricht.

Schliesslich ergiebt sich die Differenz der aus den Formeln 14 und 15 für G resultierenden Werte, wie folgt:

$$\triangle = \frac{\pi}{16}(D + d)^2 - \frac{\pi}{4} D d$$

$$\triangle = \frac{\pi}{16}(D + d)^2 - \frac{\pi}{16} \,.\, 4 D d$$

$$\triangle = \frac{\pi}{16}(D^2 + d^2 - 2 D d) = \frac{\pi}{16}(D - d)^2$$

Es ist demnach in diesem Falle die Differenz $\triangle$ gleich dem vierten Teile der dem Durchmesser $(D-d)$ zugehörigen Kreisfläche.

37. Die überaus grossen und namentlich im Zeitaufwande zum Ausdruck kommenden Schwierigkeiten, welche sich der raschen Auffindung des grössten und kleinsten Durchmessers am Baume entgegenstellen, sind daran schuldtragend, dass auch heute noch in allen Fällen der forstlichen Praxis die Berechnung der Baumquerflächen als Kreis aus einem beliebigen Durchmesser erfolgt, und dass man nur in jenen Fällen, in welchen eine auffällige Exzentrizität der Jahresringe eine meist elliptische Form des Querschnittes involviert, die Berechnung als Kreisfläche nach dem s. g. verglichenen Durchmesser in der Weise vollzieht, dass man von zwei beliebigen, aber stets senkrecht zu einander gemessenen Durchmessern der Querfläche das arithmetische Mittel $\left(\frac{D+d}{2}\right)$ nimmt, dieses als Durchmesser betrachtet und die hierzu gehörige Kreisfläche berechnet.

38. Für wissenschaftliche Untersuchungen und anderweitig notwendig werdende genaue Erhebungen der Baumquerflächengrösse reicht jedoch dieses immerhin ziemlich rohe Verfahren nicht aus, und wird man daher in allen jenen Fällen, in welchen eine genaue planimetrische

Berechnung der Baumquerflächen infolge der Unzugänglichkeit derselben ausgeschlossen erscheint, die Berechnung derselben als Ellipse nach Formel 15 zu bewirken haben.

Ist es hingegen gestattet, den Schaft an der Messstelle zu zersägen und wird solchergestallt die Baumquerfläche zugänglich gemacht, so finden für wissenschaftliche Untersuchungszwecke namentlich folgende Methoden Anwendung:

α. Die Berechnung mittelst des Polarplanimeters;

β. das Verfahren mittelst der Äquidistanten;

γ. das Verfahren nach den verglichenen Durchmessern.

39. *α.* Die Berechnung der Querflächen mittelst des Polarplanimeters. Zu diesem Behufe muss die zu untersuchende Stammscheibe zunächst geglättet werden, wodurch bei den Nadelhölzern die Jahresringe meist schon ohne Zuhilfenahme weiterer Hilfsmittel deutlich hervortreten, während bei den Laubhölzern, woselbst die Jahresringe sich zumeist weniger scharf abheben, ein vorheriges Umfahren mittelst eines scharf zugespitzten Bleistiftes denjenigen Jahresring leicht festhalten lässt, welcher die zu messende Querfläche umschliesst. Frische Nadelholzscheiben sind des austretenden Harzes wegen vor Beginn der Arbeit mit Spiritus gut abzureiben.

Ist die Scheibe gross genug, um dem Planimeter beim Umfahren der Figur allenthalben Raum zur Aufnahme zu bieten, so ist jede weitere Vorrichtung entbehrlich; für kleinere Scheiben hingegen wird eine mit Zeichenpapier überzogene und durch Stellschrauben verstellbare Platte, die zur Aufnahme des Poles und der Laufrolle des Planimeters dient, erforderlich. Im letzteren Falle ist zu beachten, dass die Oberseite der zu berechnenden Stammscheibe mit der Platte in eine und dieselbe Ebene gebracht werden muss. Zweckmässig ist es auch, sich beim Umfahren der Figur eines Fahrgläschens zu bedienen.

Die durch den Gebrauch der Polarplanimeter erreichbare Genauigkeit wird desto grösser, je öfter die Figur umfahren wird und fand Kunze[1]) bei zwanzigmaliger Umfahrung eine Schwankung des Flächenfehlers von $-1._{38}$ bis $+0._{76}\,{}^0/_0$. Zu noch besseren Resultaten gelangt man, wenn man die zu berechnende Figur vorher sorgfältig auf Seidenpapier überträgt und erst auf diesem die Berechnung vornimmt, oder wenn man sich jener Polarplanimeter bedient, bei welchen

[1]) Vergl. dessen „Holzmesskunst" S. 218 u. 219.

die Rolle auf einer Glas- oder Hartgummischeibe läuft. (Patent Hohmann-Coradi, Zürich.)

40. β. Das Verfahren mittelst der Äquidistanten. Man zieht auf der zuvor geglätteten Scheibe den augenscheinlich grössten Durchmesser DD_1 und errichtet in gleichen Abständen die Senkrechten (Äquidistanten) y_1, y_2, y_3 etc., wodurch die Querfläche in Trapeze zerlegt wird, die dann nach der bekannten Formel berechnet werden können. Der Flächeninhalt dieser Trapeze ist dann

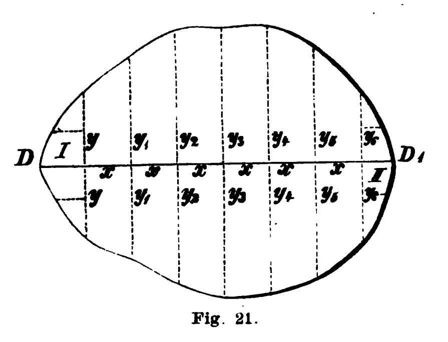


Fig. 21.

$$G = \frac{x}{2}(y + y_1) + \frac{x}{2}(y_1 + y_2) + \ldots . + \frac{x}{2}(y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{x}{2}(y + 2y_1 + 2y_2 + \ldots \ldots + 2y_{n-1} + y_n) =$$

$$= x\left(\frac{y + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots \ldots + y_{n-1}\right) \quad \ldots . \; 16)$$

d. h. man nehme die halbe Summe der ersten und letzten Äquidistanten, addiere hierzu alle dazwischen liegenden, und multipliziere die Gesamtsumme mit dem gemeinschaftlichen Abstande x, worauf in dem sich ergebenden Produkte der Flächeninhalt des durch die Äquidistanten y und y_n begrenzten Flächenstückes zum Ausdruck kommt. Es erübrigt dann nur noch die Berechnung der beiden Segmente I und II (s. Fig. 21), welche in ganz gleicher Weise durchgeführt wird, und deren Resultate zu der anfangs gefundenen Grösse zuzuschlagen sind, damit der Flächeninhalt der Gesamtfigur sich ergebe.

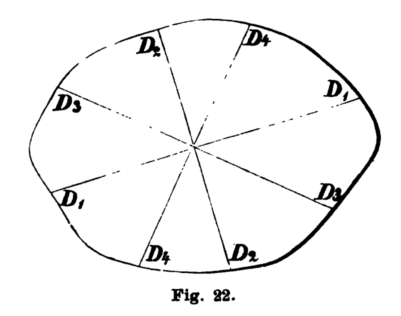


Fig. 22.

41. γ. Bei einem weiteren Verfahren, welches namentlich in früherer Zeit sehr häufig in Anwendung kam, werden auf der zu untersuchenden Querfläche mehrere Durchmesser D_1, D_2, D_3 etc. gezogen, von welchen sich immer je zwei rechtwinkelig schneiden. Hierauf misst man mittelst eines prismatischen Massstabes oder mittelst der Scheiben-

kluppe die Grösse dieser Durchmesser, berechnet ihr arithmetisches Mittel nach der Formel

$$D_m = \frac{D_1 + D_2 + D_3 + \ldots + D_n}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

und aus dem arithmetisch mittleren Durchmesser die Kreisfläche.

Untersuchungen über die Genauigkeit dieses mathematisch keineswegs begründeten Verfahrens liegen unseres Wissens nicht vor. (Siehe Fig. 22.)

2. Über den Einfluss der Fehler der Durchmesser- und Umfangsmessung auf den Inhalt der Baumquerflächen.

42. a. **Einfluss der Durchmesserfehler.** Setzt man voraus, dass die Baumquerflächen völlig der Kreisform entsprechen, so muss ein bei der Messung des Durchmessers D begangener positiver oder negativer Fehler f naturnotwendig auch eine fehlerhafte Berechnung der Kreisfläche nach sich ziehen. Die fragliche Grösse dieses Flächenfehlers $\triangle$ lässt sich folgendermassen bestimmen:

Wäre der wirkliche Inhalt der Kreisfläche

$$G = \frac{D^2}{4}\pi$$

und jener der aus dem um f zu gross gemessenen Durchmesser berechneten Kreisfläche

$$G_1 = \frac{\pi}{4}(D + f)^2,$$

so ist die Grösse des Fehlers

$$\triangle = G_1 - G = \frac{\pi}{4}(D^2 + 2\,Df + f^2 - D^2)$$

$$\triangle = \frac{\pi}{4}(2\,Df + f^2).$$

Da aber f stets als sehr klein angenommen werden muss, so kann das naturgemäss noch kleinere f^2 vernachlässigt werden und es ist dann

$$\triangle = \frac{\pi}{2}Df$$

d. h. der Flächenfehler $\triangle$ wächst bei gleichbleibendem f mit der Grösse des Durchmessers, bei gleichbleibendem D aber mit der Grösse des Durchmesserfehlers f.

Wäre beispielsweise ein in Wirklichkeit 20 cm messender Durchmesser um 0·1 cm zu gross gemessen worden, so wäre der hierdurch verursachte Flächenfehler nach obiger Formel

$$\triangle = \frac{\pi}{2} \times 20 \times 0{\cdot}1 = 1{\cdot}5708 \times 2 = 3{\cdot}1416\ \text{cm}^2.$$

Würde aber derselbe Messungsfehler bei einem in Wirklichkeit 50 cm messenden Durchmesser begangen worden sein, so wäre das für diesen Fall berechnete

$$\triangle = \frac{\pi}{2} \times 50 \times 0{\cdot}1 = 1{\cdot}5705 \times 5 = 7{\cdot}8540 \text{ cm}^2$$

und es bestände die Verhältnisgleichung

$$3{\cdot}1416 : 7{\cdot}8540 = 20 : 50.$$

Dementsprechend wird die Rückwirkung des Durchmesserfehlers um so grösser, je grösser der Durchmesser war, bei dessen Erhebung er begangen wurde. Es ist daher Grund genug vorhanden, mit der Zunahme der Durchmesser das Messgeschäft mit wachsender Aufmerksamkeit zu vollziehen.

43. b. **Einfluss des Umfangsfehlers.** Nimmt man an, es hätte sich bei der Umfangsmessung ein positiver Fehler φ eingeschlichen, so ist der hieraus resultierende Flächenfehler

$$\triangle = \frac{(U+\varphi)^2}{4\pi} - \frac{U^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}(2\,U\varphi + \varphi^2)$$

und wenn φ^2 aus demselben Grunde wie oben sub α das f^2 vernachlässigt wird, so ist

$$\triangle = \frac{U\varphi}{2\pi},$$

woraus sich eine ganz ähnliche Schlussfolgerung wie jene sub No. 42 entwickeln liesse.

44. c. **Wechselbeziehungen zwischen Umfangs- und Durchmesserfehler.** Schliesslich ist es von Interesse zu erfahren, wie gross der Umfangsfehler φ sein müsste, um auf die Berechnung der Kreisfläche denselben Einfluss zu üben, wie ein bestimmter Durchmesserfehler f.

In diesem Falle muss der um φ zu gross gemessene Umfang derjenigen Kreisperipherie gleichgestellt werden können, die sich aus dem um f zu gross gemessenen Durchmesser ableiten lässt. Es ist daher

$$U + \varphi = (D + f)\,\pi$$
$$U + \varphi = D\pi + f\pi$$
$$\varphi = f\pi = 3{\cdot}14159 \times f$$

d. h. ein bei der Umfangsmessung begangener Fehler φ muss π mal so gross sein als der Durchmesserfehler f, um mit dem letzteren einen gleich grossen Flächenfehler zu involvieren.

45. d. **Wechselbeziehungen zwischen Umfangsfehler und Flächenfehlerprozent.** Ebensowohl in der forstlichen Praxis, wie auch zum Zwecke genauer statischer Untersuchungen pflegt man die Durchmesser starker und schwacher Stämme auf dieselben Bruchteile der Masseinheit abzurunden, wodurch aber, wie bereits oben entwickelt

wurde, die einzelnen Querflächen je nach Massgabe der Grösse ihrer Durchmesser verschieden genau erhalten werden müssen.

Aus diesem Grunde ist es wichtig, zu erfahren, welche Abrundung bei den Durchmessern verschiedener Grösse zulässig ist, damit in keinem Falle ein bestimmtes Flächenfehlerprozent, das wir im allgemeinen p nennen wollen, überschritten werde.

Nennt man für diesen Fall den zulässigen Flächenfehler x und die wirkliche Kreisfläche G, so besteht die Verhältnisgleichung:

$$x : G = p : 100$$

woraus

$$p = \frac{x}{G} \cdot 100.$$

Werden in diese Gleichung die für x und G oben gefundenen Werte eingesetzt, so erhält man für den Fall als die Flächenberechnung auf Grund eines gemessenen Durchmessers bewirkt wurde

$$p = \frac{\frac{\pi}{2} . D . f}{D^2 \frac{\pi}{4}} \times 100 = 200 \frac{f}{D}$$

und für die Umfangsmessung

$$p = \frac{\frac{U . \varphi}{2 \pi}}{\frac{U^2}{4 \pi}} \times 100 = 200 \frac{\varphi}{U},$$

woraus hervorgeht, dass das Flächenfehlerprozent bei konstantem Durchmesser- oder Umfangsfehler umgekehrt proportional ist dem Durchmesser oder Umfange, dass hingegen bei gleichbleibendem Durchmesser oder Umfang und wechselndem f oder φ das Flächenfehlerprozent im geraden Verhältnisse zum Umfang oder Durchmesser steht.

Werden nun in den Gleichungen

$$p = 200 \times \frac{f}{D} \quad \text{und} \quad p = 200 \times \frac{\varphi}{U}$$

p als eine bekannte und f und φ als unbekannte Grössen angenommen, so ist

$$f = \frac{p}{200} D \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{p}{200} U,$$

in welch letztere Gleichungen nur alle aufeinanderfolgenden Durchmesser und Umfänge eingesetzt zu werden brauchen, um jene Durchmesser- und Umfangsfehler aufzufinden, welche für die einzelnen Durch-

messer und Umfänge zulässig sind, um ein bestimmtes Flächenfehlerprozent nicht zu überschreiten.

In der nachfolgenden Tabelle, welche Kunze's „Lehrbuch der Holzmesskunst" entnommen ist, wurde $p = 1$ angenommen.

D cm	f cm	D cm	f cm	D cm	f cm
1	$0._{005}$	10	$0._{050}$	60	$0._{300}$
2	$0._{010}$	20	$0._{100}$	70	$0._{350}$
3	$0._{015}$	30	$0._{150}$	80	$0._{400}$
4	$0._{020}$	40	$0._{200}$	90	$0._{450}$
5	$0._{025}$	50	$0._{250}$	100	$0._{500}$

Soll demnach, wie aus obenstehender Tabelle zu ersehen, bei der Berechnung von Kreisflächen aus dem zugehörigen Durchmesser das Flächenfehlerprozent $p = 1$ nicht überschritten werden, so wäre bei Durchmessern, die nur 1 cm messen, eine Abrundung auf $\frac{5}{100}$ mm notwendig, für Durchmesser von 50 cm hingegen schon eine solche 2·5 mm, d. h. um ein gleich grosses Flächenfehlerprozent zu erhalten, müssen die Durchmesser kleiner Kreisflächen weitaus genauer gemessen werden, als jene der grösseren.[1])

46. e. Abhängigkeit des Flächenfehlerprozentes von den Instrumenten der Durchmesser- und Umfangsmessung. Wie aus dem Vorstehenden zu ersehen ist, ist die Genauigkeit, mit welcher die Querflächenberechnung vollzogen werden kann, im hohen Grade von der Genauigkeit abhängig, mit welcher die der Flächenberechnung zu Grunde gelegten Durchmesser oder Umfänge gemessen wurden. Darum ist es von Interesse zu erfahren, welche zur Stärkemessung dienenden Instrumente die genaueste Messung der Baumstärken gestatten.

Nach Untersuchungen, welche der nachmalige k. k. Ministerialrat und Oberlandforstmeister Robert Micklitz anstellte und in der allg. Forst- und Jagdzeitung, Jahrg. 1860 S. 108, veröffentlichte, ergab die Messung der Baumstärken mittelst der Kluppe nur ein Flächenfehlerprozent von + 0·42; die Messung mittelst des Baumzirkels ein solches von — 3·24, während die aus den gemessenen Baumumfängen berechneten Querflächen nach Schmidtborn[2]) ein Flächenfehlerprozent von im Mittel + 2·59 resultieren liessen, welches

---

[1]) Das Verdienst, zuerst auf die Wechselbeziehungen zwischen Flächenfehlerprozenten und Durchmesserfehler aufmerksam gemacht zu haben, gebührt Dr. Ed. Heyer. Vergl. hierüber „Supplemente zur allg. Forst- u. Jagdzeitung". V. Band. S. 161.

[2]) a. a. O.

sich in zwölf Beobachtungsfällen zwischen + 0.11 und + 8·77 bewegte.

Dass durch die Umfangsmessung grössere Fehlerprozente involviert werden, scheint für den ersten Augenblick mit dem vorher entwickelten Satze zu kollidieren, dass ein bei der Umfangsmessung begangener Fehler π mal so gross sein müsse, als ein bestimmter Durchmesserfehler, um mit diesem einen gleich grossen Flächenfehler zu begründen. Dieser scheinbare Widerspruch findet aber darin seine Erklärung, dass der gemessene Umfang der Querflächen, welche nur in den seltensten Fällen der Kreisform entsprechen, zur Berechnung einer Kreisfläche benützt wird, was aus den bereits oben genannten Gründen stets zu zu grossen Resultaten führen muss. Zudem ist auch nicht zu übersehen, dass sich das Messband beim Gebrauche viel weniger eng an den Baumumfang anschmiegen lässt, als die Kluppe an die Endpunkte des Durchmessers, und dass daher die Umfänge an und für sich schon zu gross gefunden werden.

3. Die Kreisflächen- und Kreisflächen-Multiplikations-Tafeln.

47. Da es bei der Berechnung der Baumquerflächen aus den Durchmessern oder Umfängen stets darauf ankommt, das Rechnungsgeschäft rasch und sicher zu bewirken, so bedient man sich mit Vorteil der Kreisflächen- und Kreisflächenmultiplikationstafeln, welche jedwelche Rechnungsoperation überflüssig machen, da sie eben die für alle nach einem bestimmten Gesetze abgestuften Durchmesser oder Umfänge die zugehörigen Kreisflächen in tabellarischer Anordnung enthalten.

Nachdem aber diese beiden Tafelwerke eine sichere und rasche Auffindung bestimmter Zifferngruppen ermöglichen sollen, so ist es notwendig, dass neben der Richtigkeit des zusammengetragenen Ziffermaterials auf eine thunlichst übersichtliche typographische Ausstattung Rücksicht genommen werde.

Kreisflächentafeln, welche die den Durchmessern oder Umfängen zugehörigen Kreisflächen unmittelbar angeben, enthalten fast alle Holzkubierungstafeln und empfehlen wir diesbezüglich besonders „Pressler's Hilfsbuch für Schule und Praxis“, sowie die Kreisflächentafeln von A. v. Seckendorff. Kunze's „siebenstellige Kreisflächen für alle Durchmesser von 0·01 bis 99·99“ sind bei wissenschaftlichen Untersuchungen vorzüglich verwendbar.

3. Kapitel.

Von der Messung der Längen.

48. Man kann sich zur Längenmessung des Holzes geeigneter Messstangen (Latten) oder der Messbänder bedienen.

1. Die Messlatten.

Einrichtung und Gebrauch.

Die Messlatten werden aus gut getrocknetem Holze in der Länge von 2 m bis 5 m und mit rechteckigem $\left(\frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}}\right)$ oder quadratischem $\left(\frac{3\text{ cm}}{3\text{ cm}}\right)$ Querschnitte hergestellt. Die Endquerflächen derselben stehen senkrecht zur Längenrichtung und sind, um sie vor dem Bestossen zu schützen, mit Metall beschlagen. — Um sie dem Einflusse der Nässe gegenüber widerstandsfähiger zu machen, pflegt man diese Massstäbe mit Firnis einzulassen, und um ein „Werfen" derselben zu hindern, werden sie aus zwei bis drei Stücken der Länge nach zusammengesetzt.

Die Messstangen erhalten eine Teilung, die bis auf 0·1 m herabgeht.

Ergänzungen von Längen unter 0·1 m werden am vorteilhaftesten mit einem geteilten Dezimeterstäbchen erhoben.

Zur Längenmessung soll man sich zweier solcher Messstangen bedienen.

Die erste wird mit ihrem Ende an das Schaftende genau angelegt und auf dem liegenden Baumstamme in die Richtung der Stammachse gebracht; während diese Messstange in der geschilderten Position unverrückt erhalten wird, stösst man die zweite Messlatte genau an die erste an und giebt ihr ebenfalls dieselbe Richtung. Hierauf wird die erste Latte, während man die zweite in ihrer Lage festhält, vom Schafte abgenommen und an die zweite vorschreitend als dritte Lage angesetzt, und so wird fortgefahren, bis man mit der Messung an das zweite Schaftende gelangt ist. Der etwaige unter 0·1 m betragende Rest wird mit dem Dezimeterstäbchen eingemessen.

Dass man hier die Längenmessung nicht längs der Baumachse, sondern längs einer Stammseite (Kontur) vorgenommen, hat, wie gleich gezeigt werden soll, selbst bei genauen Erhebungen wenig zu bedeuten.

Denn ist $AabB$ Fig. 23 ein Schaftstück, dessen unterer Durch-

messer $AB = D$ und der obere $ab = d$ misst, so beträgt die wahre Länge des Stückes, längs der Achse Cc gemessen, $Cc = Da = \lambda$ und

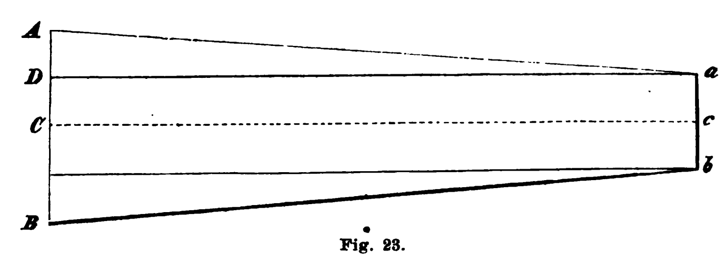


Fig. 23.

die längs der Seite Aa erhobene Masszahl $Aa = L$, und da $DA = \frac{D-d}{2}$, so folgt:

$$\lambda^2 = L^2 - \left(\frac{D-d}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Wird nun die Grösse, um welche sich L von λ unterscheidet, mit $\triangle$ bezeichnet, so muss $\lambda = L - \triangle$, und daher $\lambda^2 = (L - \triangle)^2 = L^2 - 2L\triangle + \triangle^2$ sein.

Nun ist aber $\triangle^2$ gegen die übrigen hier entstandenen Grössen sehr klein und kann daher hinweggelassen werden, so dass $\lambda^2 = L^2 - 2L\triangle$ geschrieben werden kann.

Vergleicht man diese letzte Gleichung mit α, so folgt

$$2L\triangle = \left(\frac{D-d}{2}\right)^2, \quad \text{daher} \quad \triangle = \frac{(D-d)^2}{8L}$$

Angenommen, dass bei einem Schaftstück $D = 45$ cm, $d = 10$ cm und $L = 30$ m gefunden wurde, so ist $\triangle = \frac{(0{\cdot}45 - 0{\cdot}1)^2}{8 \times 30} = 0{\cdot}00051$ cm, also ca. 0·5 mm, eine Differenz, die auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen nicht ins Gewicht fallen kann.

2. Das Längenmessband.

Einrichtung und Gebrauch.

Leichter transportabel als die Messlatten und daher zur Messung von Stammlängen häufiger verwendet wird das Messband.

Ist das Messband aus einer Pflanzenfaser (Hanf, Leinen) hergestellt, so muss es entweder mit Firniss imprägniert werden, oder es erhält einen förmlichen Ölanstrich. In neuerer Zeit enthalten derartige Messbänder der Länge nach parallel zu einander eingewobene Metalldrähte. Man giebt dem Messband eine Länge von 10—20 m und eine Teilung, die auf Dezimeter hinabgeht. Messbänder ordinärer Gattung findet

man gewöhnlich auf einfachen hölzernen Haspeln aufgewunden; feinere Sorten sind in nett ausgeführten Lederkapseln, mittelst Kurbel aufwindbar, untergebracht.

Empfehlenswert ob ihrer Verlässlichkeit, Dauer und Verwendbarkeit in Nässe und Schmutz sind die 10 m langen, zum bequemeren Transporte in Metallkapseln oder auf Eisenhaspeln angebrachten Stahlmessbänder. Dieselben sind mit Strichen und Bezifferung oder mit verschieden geformten Messingmarken und Nieten zum Zwecke der Teilung versehen.

Selbstverständlich wird auch mit einem Messbande die Messung auf der Oberseite des Stammes, längs einer Seite desselben vorgenommen; der Fehler, der hierdurch begangen wird, ist auch hier $\triangle = \frac{(D-d)^2}{8L}$ und daher irrelevant.

Hier und da verwendet man zur Längenmessung Ketten aus schwachem Eisen- oder Messingdraht. Sie sind des unbequemen Hantierens und ihrer Dehnbarkeit wegen zu verwerfen.

Über den Einfluss der Längen- und Durchmessermessung auf den Inhalt der Stämme siehe No. 56.

---

4. Kapitel.

Von der Kubierung liegender Stämme.

1. Kubierung aus gemessenen Dimensionen (stereometrische Kubierung).

A. Allgemeine stereometrische Formeln.

49. Wir haben in dem Kapitel „Vorbegriffe" gesehen, dass einzelne Schaftstücke, möglicherweise auch ganze Schäfte, annähernd jene Form besitzen, wie sie mathematisch durch die Schaftkurven-Gleichung $y^2 = px^m$ ausgedrückt werden kann. Denken wir uns den durch die Rotation dieser Schaftkurve entstandenen Körper senkrecht zu seiner Achse (x — Achse) in den gleichen Abständen $\frac{x}{n}$ geschnitten, so dass diese Schnitte vom Scheitel aus in den Entfernungen $\frac{x}{n}$, $2\frac{x}{n}$, $3\frac{x}{n}$, . . . $(n-1)\frac{x}{n}$ und $n\frac{x}{n}\,(=x)$ liegen und bezeichnen wir die Radien der so entstandenen Schnittkreise der Reihe nach mit y_1, y_2, y_3, ... y_n, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$y_1^2 = p\left(\frac{x}{n}\right)^m$$

$$y_2^2 = p\left(\frac{2x}{n}\right)^m$$

$$y_3^2 = p\left(\frac{3x}{n}\right)^m$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n^2 = p\left(\frac{nx}{n}\right)^m$$

und sind daher auch die nachstehenden Proportionen richtig:

$$\left.\begin{array}{l} y_1^2 : y_n^2 = 1^m : n^m \\ y_2^2 : y_n^2 = 2^m : n^m \\ y_3^2 : y_n^2 = 3^m : n^m \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}^2 : y_n^2 = (n-1)^m : n^m \\ y_n^2 : y_n^2 = n^m : n_m \end{array}\right\} \text{woraus folgt: } \left\{\begin{array}{l} y_1^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^m y_n^2 \\ y_2^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^m y_n^2 \\ y_3^2 = \left(\frac{3}{n}\right)^m y_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^m y_n^2 \\ y_n^2 = \left(\frac{n}{n}\right)^m y_n^2 \end{array}\right.$$

daraus ergiebt sich weiter:

$$y_1^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{1^m}{n^{1+m}} y_n^2 \pi x$$

$$y_2^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{2^m}{n^{1+m}} y_n^2 \pi x$$

$$y_3^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{3^m}{n^{1+m}} y_n^2 \pi x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n-1}^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{(n-1)^m}{n^{1+m}} y_n^2 \pi x$$

$$y_n^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{n^m}{n^{1+m}} y_n^2 \pi x.$$

Denkt man sich unter n eine unendlich grosse Zahl, so wird $\frac{x}{n} \doteq 0$, d. h. eine unendlich kleine Grösse und können daher die Ausdrücke $y_1^2 \pi \frac{x}{n}$, $y_2^2 \pi \frac{x}{n}$, $y_3^2 \pi \frac{x}{n}$, ... $y_n^2 \pi \frac{x}{n}$ als Cylinder betrachtet werden, welche in ihrer Summe den kubischen Inhalt (K) des ganzen

Rotationskörpers von der Länge x und dem Basishalbmesser y_n vorstellen.

Es ist sohin

$$K = \frac{y_n^2 \pi x}{n^{1+m}} [1^m + 2^m + 3^m + \dots\dots + n^m].$$

Nun ist aber $1^m + 2^m + 3^m + \dots\dots + n^m = \frac{n^{1+m}}{1+m} + \frac{n^m}{A} + \frac{n^{m-1}}{B} + \dots\dots + \frac{n^2}{M} + \frac{n}{N}$, worin $A, B, C \dots\dots N$ gewisse ganze positive oder negative Zahlen vorstellen mögen, deren besondere Werte jedoch für unseren Fall ganz irrelevant sind.

Unter Berücksichtigung der letzteren Gleichung erhalten wir daher

$$K = \frac{y_n^2 \pi x}{n^{1+m}} \left[\frac{n^{1+m}}{1+m} + \frac{n^m}{A} + \frac{n^{m-1}}{B} + \dots\dots + \frac{n^2}{M} + \frac{n}{N}\right] \text{ oder}$$

$$K = y_n^2 \pi x \left[\frac{1}{1+m} + \frac{1}{A\,n} + \frac{1}{Bn^2} + \dots\dots + \frac{1}{Mn^{m-1}} + \frac{1}{N\,n^m}\right].$$

Da aber unter der Voraussetzung $n = \infty$, $\frac{1}{A\,.\,n} = \frac{1}{Bn^2} = \dots\dots = \frac{1}{M_n^{m-1}} = \frac{1}{N_n^m} = 0$, so folgt: $K = y_n^2 \pi x \frac{1}{1+m}$, oder bedenkt man, dass y_n der Radius r der Basis des Umdrehungskörpers, h seine Höhe oder Länge ist, so kann auch die Formel

$$K = \frac{1}{1+m} r^2 \pi h \dots\dots\dots\dots\dots 18)$$

angesetzt werden.

Soll der Durchmesser d statt des Radius r, soll daher $r = \frac{d}{2}$ eingeführt werden, so resultiert:

$$K = \frac{1}{4(1+m)} d^2 \pi h \dots\dots\dots\dots\dots 19)$$

oder wird $r^2 \pi = \frac{d^2}{4} \pi = G$ der Basis gleich gesetzt, so folgt

$$K = \frac{1}{1+m} G h \dots\dots\dots\dots\dots 20)$$

Anmerkung. Bei der Ableitung der Formel 18 wurde angenommen, dass $1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \frac{n^{1+m}}{1+m} + \frac{n^m}{A} + \frac{n^{m-1}}{B} + \dots + \frac{n^2}{M} + \frac{n}{N}$. Die Zahlen $1^m, 2^m, 3^m, \dots n^m$ bilden eine arithmetische Reihe des $m$ten Grades. Für derartige Reihen gilt die Summenformel (summatorisches Glied) $S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n}{m+1} \Delta^m a_1$

Sucht man nun die summatorischen Glieder der Reihe 1^m, 2^m, $3^m \ldots . n^m$ unter den Voraussetzungen $m = 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$, $\ldots . = m$, so erhält man Polynome, geordnet nach fallenden (wenn man will auch steigenden) Potenzen von n und das Glied mit der höchsten Potenz von n hat immer den Wert $\frac{n^{1+m}}{1+m}$, welcher Umstand bei der obigen Entwickelung verwertet wurde. — (Über höhere arithmetische Reihen siehe Langenbacher's Forstmathematik.) Auf höherem Wege gelangt man rascher zu der Formel 18. Ist nämlich $y^2 = p x^m$ die Gleichung der Schaftkurve und sind x_1, y_1 die Koordinaten irgend eines Punktes M, dieser Kurve, so muss auch die Gleichung $y_1{}^2 = p x_1{}^m$, somit auch die Propoition $y^2 : y_1{}^2 = x^m : x_1{}^m$ bestehen, woraus $y^2 = y_1{}^2 \left(\frac{x}{x_1}\right)^m$ resultiert. Ist nun dx die Höhe des Cylinders (z), dessen Radius y vorstellt, so ist der Inhalt dieses Cylinders $z = y^2 \pi dx = y_1{}^2 \left(\frac{x}{x_1}\right)^m \pi dx$ und somit der Inhalt K_1 des aus der Schaftkurve entstanden gedachten Rotationskörpers

$$K = \int_0^{x_1} y_1{}^2 \left(\frac{x}{x_1}\right)^m \pi \, dx = y_1{}^2 \pi x_1 \frac{1}{1+m} + C, \text{ da aber für } x = 0$$

auch $K = 0$ wird, so folgt, dass auch $C = 0$ sein muss und wir erhalten somit $K = \frac{1}{1+m} y_1{}^2 \pi x_1 = \frac{1}{1+m} r^2 \pi h$ die Formel sub No. 18.

In den Formeln 18, 19, 20 fanden wir den uns schon aus den Nummern 6 und 7 bekannten Formexponenten und wissen auch von dorther, dass den typischen Formen der Stämme für m ganz besondere Werte zukommen, und zwar ist für den Cylinder $m = 0$, für das Paraboloid $m = 1$, für den gem. Kegel $m = 2$ und für das Neiloid $m = 3$.

Werden diese besonderen Werte in die obigen Formeln 19 und 20 eingesetzt, so resultieren für den Cylinder die bereits als bekannt vorausgesetzten Formeln

$$K = \frac{\pi}{4} d^2 h \ldots \ldots . 21) \quad \text{und} \quad K = G h \ldots \ldots . . 22)$$

für das Paraboloid:

$$K = \frac{\pi}{8} d^2 h \ldots \ldots 23) \quad \text{und} \quad K = \frac{1}{2} G h \ldots \ldots . 24)$$

für den gem. Kegel:

$$K = \frac{\pi}{12} d^2 h \ldots \ldots 25) \quad \text{und} \quad K = \frac{1}{3} G h \ldots \ldots . 26)$$

für das Neiloid:

$$K = \frac{\pi}{16} d^2 h \ldots \ldots . 27) \quad \text{und} \quad K = \frac{1}{4} G h \ldots \ldots . 28)$$

B. Formeln zur Kubierung von Schaftstücken. (Entwipfelte Stämme Stutze.)

50. Handelt es sich um die Berechnung des Inhaltes eines Schaftstückes, dessen Formexponent m bestimmt wurde, hat ferner dasselbe die Länge l und liegt die grössere Grundfläche vom Wipfel in der Entfernung h, so ist der Rauminhalt J des Schaftstückes als Differenz der Inhalte $K = \frac{1}{1+m} Gh$ und $k = \frac{1}{1+m} g(h-l)$, wenn g die kleinere Grundfläche des Stutzes bedeutet, zu betrachten, so dass $J = K - k = \frac{1}{1+m} [Gh - g(h-l)]$ gefunden wird.

Soll aber unabhängig von der Grösse h eine allgemeine Formel für die Stutze der hier in Rede stehenden Rotationskörper aufgestellt werden, so denke man sich in die letzterhaltene Formel zunächst $h - l = z$, daher auch $h = l + z$ gesetzt; es übergeht dann J in

$$J = \frac{1}{1+m} [G(l+z) - gz] = \frac{1}{1+m} [Gl + z(G-g)];$$

da nun nach dem Gesetze der Schaftkurve die Proportion besteht:

$$(l+z)^m : z^m = G : g$$

$$\text{oder } l + z : z = \sqrt[m]{G} : \sqrt[m]{g}$$

oder $l : z = \sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g} : \sqrt[m]{g}$, so lässt sich hieraus z bestimmen:

$$z = \frac{l\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}.}$$

Wird dieser Wert in die obige Gleichung für J eingeführt, so ergiebt sich als allgemeine Formel für die Inhaltsberechnung der Stutze:

$$J = \frac{l}{1+m}\left[G + \frac{(G-g)\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}}\right] \text{oder } J = \frac{l}{1+m} \frac{G\sqrt[m]{G} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}} \quad 29)$$

Daraus erhält man wieder leicht durch Substitution der Werte 1, 2 und 3 für m die Inhalte der typischen Stammformen und zwar:

für $m = 1$ (Paraboloidstutz) $J = \frac{l}{2}(G + g)$ . . . . 30)

für $m = 2$ (Kegelstutz) $J = \frac{l}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$ . . . . 31)

für $m = 3$ (Neiloidstutz) $J = \frac{l}{4}\left[G + \sqrt[3]{Gg}\left(\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{g}\right) + g\right]$ 32)

Werden die Durchmesser von G und g mit D und d bezeichnet und daher in die Formeln 30, 31 und 32 die Werte $G = \frac{D^2}{4}\pi$ und $g = \frac{d^2}{4}\pi$ substituiert, so ergeben sich:

für den Paraboloidstutz $J = \frac{\pi l}{8}(D^2 + d^2)$ . . . . 33)

für den Kegelstutz $J = \frac{\pi l}{12}(D^2 + Dd + d^2)$ . . . . 34)

für den Neiloidstutz $J = \frac{\pi l}{16}\left[D^2 + \sqrt[3]{D^2 d^2}\left(\sqrt[3]{D^2} + \sqrt[3]{d^2}\right) + d^2\right]$ 35)

C. Speziell xylometrische Formeln.

51. Die sämtlichen vorstehenden Kubierungsformeln können als allgemeine stereometrische Formeln betrachtet werden. Ausser diesen sind aber mit mehr oder weniger Glück andere Berechnungsweisen in die Holzmesskunst eingeführt worden, die im Nachfolgenden besprochen werden sollen.

a. **Formel von Smalian.** Obwohl die Formel 30 nur für den Paraboloidstutz Geltung hat, schlug Smalian dieselbe dennoch zur Kubierung entwipfelter Stämme, ohne Rücksicht auf die Form letzterer vor. Man könnte diese Berechnung die Kubierung aus den „geglichenen Grundflächen" nennen[1]), da der Formel auch die Gestalt $J = l\frac{G+g}{2}$ gegeben werden kann.

Wird um den Fehler Δ gefragt, welcher begangen wird, wenn man diese Formel auf den Kegelstutz anwendet, so hat man zunächst für den richtigen Inhalt des letzteren den Ausdruck:

$$J_k = \frac{l}{3}(G+g) + \frac{l}{3}\sqrt{Gg} \quad \text{(s. Formel 31)}$$

oder auch $J_k = \frac{2l}{6}(G+g) + \frac{2l}{6}\sqrt{Gg}$

Wird der Kegelstutz jedoch aus denselben Dimensionen als Paraboloidstutz berechnet, so ergiebt sich $J_P = \frac{3l}{6}(G+g)$ (s. Formel 30)

und da $\Delta = J_P - J_k = \frac{l}{6}(G+g) - \frac{l}{6}2\sqrt{Gg}$

$$= \frac{l}{6}(G - 2Gg + g) = \frac{l}{6}\left(\sqrt{G} - \sqrt{g}\right)^2 = \frac{l\pi}{6}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2,$$

[1]) Nicht zu verwechseln mit den „geglichenen Durchmessern", welche letztere weiter unten zur Sprache kommen.

so beträgt hier der Fehler den sechsten Teil der Walze von der Länge des Stutzes und einem Durchmesser, welcher der Differenz der Diameter der beiden Grundflächen des Stutzes gleich ist.

Um dieses Δ wird der Kegelstutz, falls man ihn als Paraboloidstutz berechnet, zu gross gefunden.

b. **Die Körperformeln von Hossfeld** und zwar:

α) für die Vollkörper (unentwipfelte Stämme),

β) für die Körperstutze (entwipfelte Stämme).

α. Wir fanden in No. 34 die Formel 20 mit $K = \frac{1}{1+m} G h$.

Bezeichnet man die Querfläche des Stammes im dritten Teile seiner Höhe, also in $\frac{h}{3}$ vom Boden (Abhieb) aus gerechnet, mit $\mathfrak{g}$, so ist dieses $\mathfrak{g}$ vom Wipfel des Stammes in der Entfernung $\frac{2}{3} h$ gelegen und muss deshalb die Proportion:

$$G : \mathfrak{g} = h^m : \left(\frac{2}{3} h\right)^m$$

$$= 1 : \frac{2^m}{3^m} \text{ bestehen;}$$

daraus folgt $G = \mathfrak{g} \frac{3^m}{2^m}$; setzt man diesen Wert in die obige Formel für K ein, so resultiert

$$K = \frac{3^m}{2^m(1+m)} \mathfrak{g} h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

als allgemeine Hossfeld'sche Formel für die der Schaftkurvengleichung $y^2 = p x^m$ entsprechenden Umdrehungskörper.

Setzt man daselbst für m die Werte 1, 2 und 3 ein, so ergeben sich daraus die Formeln zur Berechnung der typischen Schaftformen, und zwar

für das Paraboloid und den Kegel $\Big\}$ $K = \frac{3}{4} \mathfrak{g} h$ . . . . 37)

für das Neiloid $K = \frac{27}{32} \mathfrak{g} h$ . . . . 38)

Hieraus ist ersichtlich, dass die eigentliche (spezielle) Hossfeld'sche Formel $\left(K = \frac{3}{4} \mathfrak{g} h\right)$ für das Paraboloid und den Kegel volle Geltung hat; nicht so für das Neiloid. Wollte man letzteres nach der Formel 37, nämlich $K = \frac{3}{4} \mathfrak{g} h = \frac{24}{32} \mathfrak{g} h$ berechnen, so würde man, wie

der einfache Vergleich zeigt, den Inhalt des Neiloides um $\frac{3}{32}\mathfrak{g}h$ oder 11·11% seines wahren Inhaltes zu klein finden.

Es könnte hier die Frage aufgeworfen werden: In welchem aliquoten Teile der Höhe h des Baumschaftes müsste die Querfläche $\mathfrak{g}$ genommen werden, wenn das Neiloid nach der Formel 37 richtig berechnet werden sollte?

Ist $\frac{h}{x}$ die Entfernung des fraglichen Messpunktes vom Wipfel aus gerechnet, so muss die Proportion $G : \mathfrak{g} = h^m : \left(\frac{h}{x}\right)^m$ bestehen, woraus $G = \mathfrak{g}x^m$ erhalten wird; setzt man diesen Wert in die Formel $K = \frac{1}{1+m} G h$ ein, so resultiert

$$K = \frac{x^m}{1+m}\mathfrak{g}h, \quad \text{oder weil hier } m = 3$$

$K = \frac{x^3}{4}\mathfrak{g}h$. Weil aber $\frac{x^3}{4} = \frac{3}{4}$ sein soll, daher $x^3 = 3$ sein muss, so folgt $x = \sqrt[3]{3}$, d. h. der Messpunkt muss $\frac{h}{\sqrt[3]{3}}$ unter dem Wipfel, oder

$h = \frac{h}{\sqrt[3]{3}} = h\left(1 - \frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right) = 0{\cdot}3067\,h$ oberhalb des Stammendes (Abhiebes) liegen.

β. Hossfeld's Körperformeln für die Stutze (entwipfelte Stämme).

Wir fanden in No. 35 unter der Bezeichnung 29 die für Stumpfe allgemein gültige Formel $J = \frac{l}{1+m} = \frac{G\sqrt[m]{G} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}}$.

Wird die Querfläche, in einem Drittel der Länge (l) vom stärkeren Ende aus gemessen, mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet, so muss, wenn h die Höhe des ganzen (vollen) Stammes bezeichnet, die Proportion bestehen:

$$\mathfrak{g} : g = (h - \tfrac{1}{3}l)^m : (h - l)^m, \text{ daraus folgt}$$

$$\sqrt[m]{\mathfrak{g}} : \sqrt[m]{g} = (h - \tfrac{1}{3}l) : h - l), \text{ oder auch}$$

$$3\sqrt[m]{\mathfrak{g}} : \sqrt[m]{g} = (3h - l) : (h - l), \text{ somit}$$

$$\left(3\sqrt[m]{\mathfrak{g}} - \sqrt[m]{g}\right) : \sqrt[m]{g} = 2g : (h - l) \quad \ldots\ldots\ldots \alpha)$$

Anderseits besteht aber auch die Proportion:

$$\sqrt[m]{G} : \sqrt[m]{g} = h : (h - l) \quad \ldots\ldots\ldots \beta)$$

Aus den Proportionen α und β folgt aber die Gleichung $\frac{\sqrt[m]{G}}{3\sqrt[m]{\mathfrak{g}} - \sqrt[m]{g}} = \frac{1}{2}$

und ist daraus $$\sqrt[m]{G} = \frac{3\sqrt[m]{\mathfrak{g}} - \sqrt[m]{g}}{2}$$

somit $$G = \frac{\left(3\sqrt[m]{\mathfrak{g}} - \sqrt[m]{g}\right)^m}{2^m}$$

Werden diese Werte in die Gleichung für J eingeführt, so erhält man nach einigen leichten Transformationen:

$$J = \frac{l}{3\,(1+m)\,2^m} \frac{\left(3\sqrt[m]{\mathfrak{g}} - \sqrt[m]{g}\right)^{m+1} - 2^{m+1}\, g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\mathfrak{g}} - \sqrt[m]{g}} \quad \ldots\ldots 39)$$

als Hossfeld's verallgemeinerte Formel für die Stumpfe (entwipfelte Stämme).

Setzt man in diese allgemeine Formel für m die Werte 1, 2 und 3 ein, so resultiert:

für den Paraboloidstutz und den Kegelstutz $\Big\}$ $$J = \frac{l}{4}\,(3\,\mathfrak{g} + g) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 40)$$

für den Neiloidstutz $$J = \frac{l}{4}\,(3\,\mathfrak{g} + g) + \frac{3\,l}{4}\left(\frac{\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}}{2}\right)^3 \quad . \; 41)$$

Anmerkung. Für die beiden ersten Stutze gewinnt man die Formel 40 durch Substitution von $m = 1$ und $m = 2$ in Gleichung 39 nach einigen leichten Rechnungen; für den Neiloidstutz wird der Ausdruck 41 auf folgende Art erhalten:

$$J = \frac{l}{3\times4\times8} \frac{\left(3\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}\right)^4 - 2^4\, g\sqrt[3]{g}}{\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}};$$

der Dividend des zweiten Quotienten stellt die Differenz zweier Quadrate vor und ist daher

$$J = \frac{l}{3\times4\times8} \frac{\left[\left(3\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}\right)^2 + 4\sqrt[3]{g^2}\right]\left[\left(3\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}\right)^2 - 4\sqrt[3]{g^2}\right]}{\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}}$$

und ferner

$$J = \frac{l}{3\times4\times8} \frac{\left(9\sqrt[3]{\mathfrak{g}^2} - 6\sqrt[3]{\mathfrak{g}g} + 5\sqrt[3]{g^2}\right)\left(3\sqrt[3]{\mathfrak{g}} + \sqrt[3]{g}\right)\left(3\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}\right)\cdot 3}{\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}},$$

daher auch

$$J = \frac{l}{4\times8}\left(27\,\mathfrak{g} + 5g - 9\sqrt[3]{\mathfrak{g}^2 g} + 9\sqrt[3]{\mathfrak{g}g^2}\right),$$

welcher Ausdruck als Formel für die Inhaltsberechnung des Neiloidstutzes gelten könnte. Soll jedoch die Formel 41 erhalten werden, so kann auch

$$J = \frac{l}{4\times8}\left(24\,\mathfrak{g} + 8g + 3\,\mathfrak{g} - 9\sqrt[3]{\mathfrak{g}^2 g} + 9\sqrt[3]{\mathfrak{g}g^2} - 3g\right)$$

geschrieben werden, woraus

$$J = \frac{l}{4}(3\mathfrak{g} + g) + \frac{3\,l}{4 \times 8}\left(\mathfrak{g} - 3\sqrt[3]{\mathfrak{g}^2 g} + 3\sqrt[3]{\mathfrak{g} g^2} - g\right)$$

resultiert, weil aber

$$\mathfrak{g} - 3\sqrt[3]{\mathfrak{g}^2 g} + 3\sqrt[3]{\mathfrak{g} g^2} - g = \left(\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}\right)^3,$$

so muss auch

$$J = \frac{l}{4}(3\,\mathfrak{g} + g) + \frac{3\,l}{4}\left(\frac{\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}}{2}\right)^3$$

richtig sein.

Werden in die Gleichungen 40 und 41 statt der Querflächen $\mathfrak{g}$ und g die Durchmesser δ und d, also $\mathfrak{g} = \frac{\delta^2}{4}\pi$ und $g = \frac{d^2}{4}\pi$ eingeführt, so erhält man:

für den Paraboloidstutz und den Kegelstutz $\Big\}$ $J = \frac{l\pi}{16}(3\,\delta^2 + d^2)$ . . . . 42)

für den Neiloidstutz $J = \frac{l\pi}{16}(3\delta^2 + d^2) + \frac{3\,\pi\,l}{16}\left(\frac{\sqrt[3]{\delta^2} - \sqrt[3]{d^2}}{2}\right)^3$ 43)

Wie man sieht, lassen sich nach der eigentlichen Hossfeld'schen Formel $\left(J = \frac{l}{4}(3\mathfrak{g} + g)\right)$ die Stutze des Paraboloides und Kegels genau berechnen, während das Neiloid daraus zu klein erhalten würde.

c. Riecke's (eigentlich Newton's) Körperformeln.

α. Für Vollkörper (unentwipfelte Stämme).

Wird mit γ die Querfläche in der halben Höhe $\left(\frac{h}{2}\right)$ des Stammes bezeichnet, so besteht, wie schon bekannt, die Proportion

$$G : \gamma = h^m : \left(\frac{h}{2}\right)^m, \text{ daher auch}$$

$$G : \gamma = 1 : \left(\frac{1}{2}\right)^m \text{ oder } G : \gamma = 2^m : 1, \text{ woraus}$$

$$G = 2^m\,\gamma \quad \text{oder} \quad \frac{G}{2} = 2^{m-1}\gamma \text{ resultiert.}$$

Die Formel 20 kann aber auch folgendermassen angesetzt werden: $K = \frac{1}{1+m}\left(\frac{G}{2} + \frac{G}{2}\right)h$ und wird für das eine $\frac{G}{2}$ der oben gefundene Wert eingesetzt, so erhält man

$$K = \frac{h}{1+m}\left(\frac{G}{2} + 2^{m-1}\,\gamma\right)$$

oder

$$K = \frac{h}{2(1+m)}\left(G + 2^m\,\gamma\right).$$

Setzt man nun $\frac{h}{x}(G+4\gamma)=\frac{h}{2(1+m)}(G+2^m\gamma)$, so erhalten wir mit Rücksicht auf $G=2^m\gamma$

$$\frac{h}{x}(2^m\gamma+4\gamma)=\frac{h}{2(1+m)}(2\cdot 2^m\gamma)$$

und hieraus $x=\frac{(2^m+4)(1+m)}{2^m}=\frac{(2^{m-1}+2)(1+m)}{2^{m-1}}$

somit $$K=\frac{2^{m-1}h}{(2^{m-1}+2)(1+m)}(G+4\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots 44)$$

Werden in diese Formel der Reihe nach $m=1$, 2 und 3 substituiert, so ergiebt sich

für das Paraboloid $K=\frac{h}{6}(G+4\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots 45)$

für den Kegel $K=\frac{h}{6}(G+4\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots 46)$

für das Neiloid $K=\frac{h}{6}(G+4\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots 47)$

Es gilt daher dieselbe Formel (45, 46 und 47) zur Berechnung des Kubikinhaltes des Paraboloides, des Kegels und des Neiloides.

Führt man in diese Formeln $G=\frac{D^2\pi}{4}$ und $\gamma=\frac{\delta^2\pi}{4}$ ein, so resultiert

für das Paraboloid
für den Kegel
und das Neiloid $\Big\}\; K=\frac{\pi h}{24}(D^2+4\delta^2) \quad \ldots\ldots\ldots 48)$

β. Riecke's Körperformeln für die Stutze (entwipfelte Stämme).

Gleichung 29, allgemein giltig zur Berechnung der Stutze, wurde gefunden als

$$J=\frac{l}{1+m}\,\frac{G\sqrt[m]{G}-g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G}-\sqrt[m]{g}}.$$

Wird der Querschnitt in halber Länge $\left(\frac{l}{2}\right)$ des Stutzes mit γ bezeichnet, so kann der letztere aus zwei übereinanderliegenden Stutzen bestehend gedacht werden, wovon jeder zur Länge $\frac{l}{2}$, der untere die Querschnittsflächen G und γ, der untere aber γ und g als Endflächen besitzt. Nennen wir die Inhalte dieser Stutze i_1 und i_2, so ist der Inhalt J des ganzen Stumpfes

$$J = i_1 + i_2 \text{ und da } i_1 = \frac{l}{2(m+1)} \frac{G\sqrt[m]{G} - \gamma\sqrt[m]{\gamma}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{\gamma}}$$

$$\text{und } i_2 = \frac{l}{2(m+1)} \frac{\gamma\sqrt[m]{\gamma} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}}, \text{ folglich}$$

$$J = \frac{l}{2(1+m)} \left[\frac{G\sqrt[m]{G} - \gamma\sqrt[m]{\gamma}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{\gamma}} - \frac{\gamma\sqrt[m]{\gamma} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}} \right] \text{ oder auch}$$

$$J = \frac{l}{6} \left[\frac{G\sqrt[m]{G} - \gamma\sqrt[m]{\gamma}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{\gamma}} - \frac{\gamma\sqrt[m]{\gamma} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}} \right] \frac{3}{1+m} \quad \ldots 49)$$

Man könnte zwar diesen Ausdruck noch weiter umformen, allein zum Übergang auf die speziellen Stumpfe des Paraboloides, des Kegels und Neiloides, dürfte die Gestalt der Gleichung 49 zweckmässig erscheinen. — Vor diesem Übergang ist jedoch notwendig, die Beziehungen zwischen G, γ und g näher kennen zu lernen.

Dem Vorangehenden zufolge müssen folgende Proportionen bestehen:

$\sqrt[m]{G} : \sqrt[m]{g} = h : (h - l)$, (worin h die Höhe des dem Stutze angehörigen Vollkörpers bedeutet)

und $\sqrt[m]{\gamma} : \sqrt[m]{g} = (h - \frac{l}{2}) : (h - l)$.

Aus der ersten Proportion folgt: $\left(\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}\right) : \sqrt[m]{g} = l : (h - l) \quad . \alpha)$

und aus der zweiten: $\left(\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}\right) : \sqrt[m]{g} = \frac{l}{2} : (h - l)$ oder

$$2\left(\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g} : \sqrt[m]{g} = l : (h - l) \quad . . \beta)\right.$$

Aus α und β folgt aber:

$$2\left(\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}\right) = \sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g} \text{ oder } 2\sqrt[m]{\gamma} = \sqrt[m]{G} + \sqrt[m]{g} \quad . . 50)$$

Gleichung 50 enthält die allgemeine Beziehung zwischen dem mittleren Schnitte und den beiden Basen eines Stumpfes und finden daher folgende spezielle Relationen statt:

für den Stutz des Paraboloides $(m = 1)$ $2\gamma = G + g \quad \ldots\ldots a)$

" " " " Kegels $(m = 2) \ldots$ $2\sqrt{\gamma} = \sqrt{G} + \sqrt{g} \quad . . b)$

" " " " Neiloides $(m = 3) . .$ $2\sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{g} \quad . . c)$

Substituiert man in die Gleichung 49 den Wert $m=1$, so folgt

$$J=\frac{l}{6}\left[\frac{G^2-\gamma^2}{G-\gamma}-\frac{\gamma^2-g^2}{\gamma-g}\right]\frac{3}{2} \quad \text{oder}$$

$$J=\frac{l}{6}[G+2\gamma+g]\frac{3}{2}=\frac{l}{6}\frac{3G+6\gamma+3g}{2}=\frac{l}{6}\frac{2G+6\gamma+2g+G+g}{2}$$

und mit Berücksichtigung der Relation a

$$J=\frac{l}{6}[G+4\gamma+g] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Diese Gleichung hat, da $m=1$ angenommen wurde, für den Paraboloidstutz Geltung.

Wird in die Gleichung 49 der Wert $m=2$ eingeführt, so erhält man

$$J=\frac{l}{6}\left[\frac{G\sqrt{G}-\gamma\sqrt{\gamma}}{\sqrt{G}-\sqrt{\gamma}}+\frac{\gamma\sqrt{\gamma}-g\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{g}}\right]\frac{3}{3}$$

$$=\frac{l}{6}\left[G+\sqrt{G\gamma}+\gamma+\gamma+\sqrt{\gamma g}+g\right]$$

$$=\frac{l}{6}\left[G+2\gamma+g+\sqrt{\gamma}\,(\sqrt{G}+\sqrt{g})\right] \quad \text{und mit Be-}$$

rücksichtigung der Relation b

$$J=\frac{l}{6}(G+4\gamma+g) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

die Inhaltsformel für den Kegelstutz.

Setzt man in die Gleichung 49 den Wert $m=3$, so resultiert:

$$J=\frac{l}{6}\left[\frac{G\sqrt[3]{G}-\gamma\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{G}-\sqrt[3]{\gamma}}+\frac{\gamma\sqrt[3]{\gamma}-g\sqrt[3]{g}}{\sqrt[3]{\gamma}-\sqrt[3]{g}}\right]\frac{3}{4} \quad \text{daher auch}$$

$$J=\frac{l}{6}\left[G+\sqrt[3]{G^2\gamma}+\sqrt[3]{G\gamma^2}+\gamma+\gamma+\sqrt[3]{\gamma^2 g}+\sqrt[3]{\gamma g^2}+g\right]\frac{3}{4}$$

$$=\frac{l}{6}\left[G+2\gamma+g+\sqrt[3]{\gamma^2}(\sqrt[3]{G}+\sqrt[3]{g})+\sqrt[3]{\gamma}\;(\sqrt[3]{G^2}+\sqrt[3]{g^2})\right]\frac{3}{4}$$

und mit Bezug auf Relation c

$$J=\frac{l}{6}\left[G+2\gamma+g+2\gamma+(\sqrt[3]{G^2}+\sqrt[3]{g^2})\right]\frac{3}{4} \quad \ldots\ldots \quad d)$$

Nun ist

$$\sqrt[3]{\gamma}(\sqrt[3]{G^2}+\sqrt[3]{g^2})=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{G}+\sqrt[3]{g})(\sqrt[3]{G^2}+\sqrt[3]{g^2})=\frac{G+g+\sqrt[3]{G^2g}+\sqrt[3]{Gg^2}}{2} \quad e)$$

Wird die Gleichung c quadriert, so erhält man:

$$4\sqrt[3]{\gamma^2}=\sqrt[3]{G^2}+2\sqrt[3]{Gg}+\sqrt[3]{g^2} \quad \text{und da} \quad 2\sqrt[3]{\gamma}=\sqrt[3]{G}+\sqrt[3]{g}$$

(Relation c), so folgt durch Multiplikation der beiden letzten Gleichungen:

$$8\gamma = \left(\sqrt[3]{G^2} + 2\sqrt[3]{Gg} + \sqrt[3]{g^2}\right)\left(\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{g}\right) = G + g + 3\sqrt[3]{G^2 g} + 3\sqrt[3]{G g^2}$$

und hierzu die identische Gleichung $2G + 2g = 2G + 2g$ addiert, resultiert:

$$8\gamma + 2G + 2g = 3\left(G + g + \sqrt[3]{G^2 g} + \sqrt[3]{G g^2}\right) \text{ oder}$$

$$\frac{4\gamma + G + g}{3} = \frac{G + g + \sqrt[3]{G^2 g} + \sqrt[3]{G g^2}}{2},$$ sohin ist mit Berücksichtigung der Gleichung e:

$$\sqrt[3]{\gamma}\left(\sqrt[3]{G^2} + \sqrt[3]{g^2}\right) = \frac{4\gamma + G + g}{3}$$ und wird dieser Wert in Gleichung d eingesetzt, so folgt:

$$J = \frac{l}{6}\left[G + 4\gamma + g + \frac{4\gamma + G + g}{3}\right]\frac{3}{4}$$

$$= \frac{l}{6}\left[3G + 12\gamma + 3g + 4\gamma + G + g\right]\frac{1}{4}$$

$$= \frac{l}{6}\left[G + 4\gamma + g\right] \text{ . . . . 53)}$$ (Inhaltsformel für den Neiloidstutz).

Da die Formeln 50, 51 und 52 vollkommen übereinstimmen, so können Paraboloid-, Kegel- und Neiloid-Stutz gleich genau nach der Formel $J = \frac{l}{6}(G + 4\gamma + g)$ berechnet werden. Sollen statt der Querflächen die ihnen entsprechenden Durchmesser eingeführt werden, so erhält man, da $G = \frac{D^2\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\delta^2\pi}{4}$ und $g = \frac{d^2\pi}{4}$ die Formel

$$J = \frac{\pi l}{24}\left[D^2 + 4\delta^2 + d^2\right] \text{ . . . . 54)}$$

d. **Huber's Körperformeln.**

α. Für Vollkörper (unentwipfelte Stämme).

Die allgemeine stereometrische Formel zur Berechnung solcher Rotationskörper, deren Erzeugende die Gleichung $y^2 = p\,x^m$ besitzt, wurde weiter oben (Nr. 34 Gl. 20) gefunden als $K = \frac{1}{1+m}\,G\,h$

Bezeichnet man wieder den mittleren Querschnitt des Stammes mit γ, so muss die Proportion bestehen:

$$G:\gamma = h^m : \left(\frac{h}{2}\right)^m$$

$$= 2^m : 1 \quad \text{woraus} \quad G = 2^m \gamma \text{ resultiert.}$$

Setzt man diesen Wert in die obige Körperformel ein, so ergiebt sich

$$K = \frac{2^m}{1+m} \gamma h \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

als Huber's verallgemeinerte Formel zur Kubierung ganzer Schäfte.

Werden in die Gleichung 54 die Werte $m=1$, $m=2$ und $m=3$ eingeführt, so erhält man

für das Paraboloid $K = \gamma h \ldots\ldots\ldots\ldots$ 56)

für den Kegel $K = \frac{4}{3} \gamma h \ldots\ldots\ldots\ldots$ 57)

für das Neiloid $K = 2 \gamma h \ldots\ldots\ldots\ldots$ 58)

daher für jeden dieser Körper einen anderen und stark differierenden Ausdruck.

β. Huber's Körperformeln für Stutze (entwipfelte Stämme).

Wir fanden weiter oben (Nr. 50 Gl. 29) für die Berechnung der Stutze die allgemeine Formel

$$J = \frac{l}{1+m} \frac{G\sqrt[m]{G} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}}.$$

Da nun zwischen G, γ und g die uns aus dem vorhergehenden Absatze Nr. 51c, bekannte Beziehung 50, nämlich $2\sqrt[m]{\gamma} = \sqrt[m]{G} + \sqrt[m]{g}$ besteht, so erscheint es unmöglich, in der obigen Formel für J beide Grössen G und g durch γ auszudrücken und ist daher die Aufstellung einer allgemeinen Huber'schen Formel (in welcher nur γ vorkommt) für die Umdrehungsstumpfe unthunlich. Eine der beiden Grössen G und g kann jedoch daraus eliminiert werden. In Nr. 51c, wurde für den Inhalt eines Umdrehungsstutzes gefunden:

$$J = \frac{l}{2(1+m)} \left[\frac{G\sqrt[m]{G} - \gamma\sqrt[m]{\gamma}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{\gamma}} + \frac{\gamma\sqrt[m]{\gamma} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}} \right];$$ aus der

oben citierten Gleichung ergiebt sich $\sqrt[m]{G} = 2\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}$, daher

$$G = \left(2\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}\right)^m \text{ und somit } G\sqrt[m]{G} = \left(2\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}\right)^{m+1};$$

setzt man diese Werte in die Inhaltsformel ein, so resultiert

$$J = \frac{l}{2(1+m)} \left[\frac{\left(2\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}\right)^{m+1} - \gamma\sqrt[m]{\gamma}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}} + \frac{\gamma\sqrt[m]{\gamma} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}} \right] \text{ oder}$$

$$J = \frac{l}{2(1+m)} \frac{\left(2\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}\right)^{m+1} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}} \quad \ldots\ldots \; 59)$$

In ganz gleicher Weise kann unter Beibehaltung des G das g ausgeschieden werden und man erhält:

$$J = \frac{l}{2(1+m)} \frac{G\sqrt[m]{G} - \left(2\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{G}\right)}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots \; 60)$$

Führt man in eine der beiden zuletzt aufgestellten Formeln $m = 1$ ein, so resultiert nach einfachen Reduktionen

$$J = \gamma l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 61)$$

Es ist dies Huber's Formel zur Berechnung des Paraboloidstutzes.

Soll die Formel für den Kegelstutz abgeleitet werden, so braucht man nur in die Gleichung 58 oder 59 $m = 2$ zu setzen. Es folgt aus der ersten:

$$J = \frac{l}{6} \frac{(2\sqrt{\gamma} - \sqrt{g})^3 - g\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}} = \frac{l}{6} \frac{8\sqrt{\gamma^3} - 12\sqrt{\gamma^2 g} + 6\sqrt{\gamma g^2} - g\sqrt{g} - g\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{l}{3}(4\gamma - 2\sqrt{\gamma g} + g)$$

$$= \frac{l}{3}[3\gamma + (\sqrt{\gamma} - \sqrt{g})^2] \text{ oder}$$

$$J = l\gamma + \frac{l}{3}(\sqrt{\gamma} - \sqrt{g})^2 \quad \ldots\ldots\ldots \; 62)$$

Würde der Kegelstutz nach der Formel 61 (für den Paraboloidstutz gültig) berechnet werden, so müsste sich der Körperinhalt des ersteren, wie ein Vergleich der Formeln 61 und 62 lehrt, um die Grösse $\triangle = \frac{l}{3}(\sqrt{\gamma} - \sqrt{g})^2$ zu klein ergeben. Wird $\gamma = \frac{\delta^2 \pi}{4}$ und $g = \frac{d^2 \pi}{4}$ in den Ausdruck für $\triangle$ eingeführt, so resultiert $\triangle = \frac{\pi l}{3}\left(\frac{\delta - d}{2}\right)^2$, d. h. der Inhalt des Kegelstutzes würde, nach der Formel $J = \gamma l$ berechnet, um ein Drittel der Walze von der Länge l zu klein gefunden, deren Durchmesser $(\delta - d)$ der Differenz der Durchmesser des mittleren Schnittes und der oberen Basis des Stutzes gleichkommt. Da für unseren Fall $2\sqrt{\gamma} = \sqrt{G} + \sqrt{g}$ oder

$\sqrt{\gamma}=\frac{\sqrt{G}+\sqrt{g}}{2}$, so ist auch $\triangle=\frac{l}{3}\left(\frac{\sqrt{G}-\sqrt{g}}{2}\right)^2$ also auch $\triangle=\frac{l}{12}(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2=\frac{l}{12}\left(\frac{D-\delta}{2}\right)^2$, d. h. der Kegelstutz, nach der Formel $J=1\gamma$ berechnet, wird um $\frac{1}{12}$ einer Walze zu klein gefunden, deren Länge l, deren Durchmesser aber der Differenz der Diameter beider Basen des Stutzes gleichkommt.

Werden in die Gleichung $2\sqrt{\gamma}=\sqrt{G}+\sqrt{g}$ statt der Kreisflächen die Durchmesser letzterer eingeführt, so folgt

$$\delta\sqrt{\pi}=\frac{D}{2}\sqrt{\pi}+\frac{d}{2}\sqrt{\pi} \text{ oder } \delta=\frac{D+d}{2},$$

d. h. der mittlere Schnitt des Kegelstutzes hat zum Durchmesser das arithmetische Mittel der Durchmesser der beiden Basen des Stutzes, weshalb man auch δ den verglichenen (geglichenen) Durchmesser nennt und die Berechnung des Kegelstutzes nach der Formel $J=\gamma\, l$ als jene mit dem „verglichenen Durchmesser" bezeichnet. Bei dieser Berechnung wird der Einfluss des Fehlers $\triangle=\frac{\pi l}{3}\left(\frac{\delta-d}{2}\right)^2=\frac{\pi l}{12}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2$ so bedeutend, dass durch Hinwegnahme eines Stückes vom schwächeren Ende des Stutzes bis zu einer gewissen Grenze der übrigbleibende Teil nach derselben Formel berechnet, einen grösseren Kubikinhalt ergiebt, als der ursprüngliche Stutz oder Vollkegel. —

Diese Behauptung lässt sich ganz allgemein nachweisen. Es sei der Inhalt des ganzen Schaftes nach dem verglichenen Durchmesser $\frac{D+0}{2}=\frac{D}{2}$ berechnet, was $K=\frac{\pi h}{16}D^2$ ergiebt; ebenso ist der Inhalt J eines aus demselben kegelförmigen Schafte entstandenen Stumpfes von der Länge l und oberem Durchmesser d, $J=\frac{\pi l}{16}(D+d)^2$. — Bezeichnet man die Länge des entnommenen Wipfels mit $\lambda=n\,h$ (worin n ein echter Bruch ist), so ergiebt sich die Länge des Stumpfes mit

$$l=h-n\,h=h\,(1-n).$$

Ferner muss die Proportion $D^2 : d^2 = h^m : n^m h^m$ bestehen (worin m der Formexponent ist), so dass $d^2=n^m D^2$ oder $d=n^{\frac{m}{2}}D$. Werden die Werte für l und d in die obige Formel (für J) substituiert, so bekommt man $J=\frac{\pi h}{16}D^2(1-n)(1+n^{\frac{m}{2}})^2$ und beträgt daher der Unterschied zwischen den Inhalten des ganzen Schaftes und des Stutzes

$$K-J=\frac{\pi\, h\, D^2}{16}\left[1-(1-n)(1+n^{\frac{m}{2}})^2\right] \ldots\ldots\ldots\ldots a)$$

Nun ist $(1-n)(1+n^{\frac{m}{2}})^2 = 1-n+2n^{\frac{m}{2}}-2n^{\frac{m}{2}+1}+n^m-n^{m+1}$.

Soll daher untersucht werden, unter welchen Umständen $K-J=0$, d. h. wann der Schaftinhalt dem Inhalte des Stutzes gleich ist, so braucht nur der innerhalb der eckigen Klammer der Gleichung a stehende Ausdruck gleich Null gesetzt zu werden; wir erhalten dann

$$n-2n^{\frac{m}{2}}+2n^{\frac{m}{2}+1}-n^m+n^{m+1}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b)$$

Folglich gilt für das Paraboloid ($m=1$) die Gleichung:

$$n-2n^{\frac{1}{2}}+2n^{\frac{3}{2}}-n+n^2=0 \quad \text{oder}$$

$$n^2+2n\sqrt{n}=2\sqrt{n} \quad \text{oder auch}$$

$$n^3-4n^2+8n-4=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad c)$$

Für diese Gleichung existiert nur die eine reelle Wurzel $n \doteq 0{\cdot}7$, während die beiden anderen Wurzeln $n \doteq -1{\cdot}65 \pm \sqrt{-2{\cdot}97}$ imaginär sind.

Es kann daher vom Paraboloide in der Entfernung von ca. $0{\cdot}7\,h$ von der Spitze aus gemessen durch einen auf die Achse senkrechten Schnitt ein Stutz erzeugt werden, dessen Höhe ca. $0{\cdot}3\,h$ beträgt und dessen Inhalt, nach der Formel für den „verglichenen Durchmesser" gerechnet, gerade so gross ist als der des ganzen Schaftes (letzterer nach demselben Prinzipe berechnet). Führt man jedoch in die Gleichung c einen kleineren Wert als $0{\cdot}7$ ein, also z. B. $n=0{\cdot}5$, so ergiebt ersterer in a einen negativen Wert, woraus folgt, dass jeder Schaft, dessen Länge grösser ist als $0{\cdot}3\,h$ nach der in Frage stehenden Methode berechnet, einen grösseren Inhalt giebt, als der ihm entsprechende paraboloidische Vollkörper. — Welchem unter den hier möglichen Stutzen der grösste Inhalt zukommt, wird weiter unten ermittelt.

Wird in die Gleichung b der Wert $m=2$ gesetzt, so ergiebt sich für den Kegel:

$$n^3+n^2-n=0$$

oder $n^2+n=1$, welche Gleichung die beiden reellen Wurzeln $n \doteq \frac{-1\pm 2{\cdot}236}{2}$ besitzt, wovon jedoch hier nur die positive $n \doteq 0{\cdot}618$ zulässig erscheint.

Bei einem Kegel müsste daher der Schnitt von der Spitze aus in einer Tiefe von ca. $0{\cdot}6\,h$ erfolgen, um den Stutz von ca. $0{\cdot}4\,h$ Länge zu erhalten, der noch denselben Inhalt berechnen lässt, wie er dem ganzen kegelförmigen Schafte entsprach. Wird in die Gleichung $n^2+n-1=0$ ein Wert unter $0{\cdot}6$ eingeführt, so ergiebt n^2+n-1, also auch Gleichung a einen negativen Wert, d. h. man erhält für Stutze, die länger sind als $0{\cdot}4\,h$, grössere Kubikinhalte als für den Vollkegel. Soll auch für das Neiloid und dessen Stutze dieselbe Untersuchung vorgenommen werden, so gelangt man in folgender einfacher Weise zu der Überzeugung, dass die Stutze in ihren Inhalten sich niemals grösser ergeben, als das volle Neiloid. — Durch Substitution von $m=3$ in die Gleichung b erhalten wir

$n-2n^{\frac{3}{2}}+2n^{\frac{5}{2}}-n^3+n^4=0$ und da diese Gleichung ausser $n=0$ keine reelle Wurzel hat, so folgt, dass beim Neiloide kein Stutz existiert, der sich unter Benutzung der Formel für den geglichenen Durchmesser gleich dem Vollkörper oder grösser als letzterer berechnen liesse.

Wenn der Klammerausdruck in der Formel a sein Maximum erreicht, so ist auch der Unterschied zwischen Schaft und Stutz am grössten, sonach auch der Inhalt des Stutzes am höchsten.

Für das Paraboloid ist dieser Klammerausdruck, wie weiter oben gefunden wurde: $f(n) = -2n^{\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{3}{2}} + n^2$; wird für diesen der erste Differentialquotient, also: $\frac{d f(n)}{d n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} + 3\sqrt{n} + 2n$ bestimmt und gleich Null gesetzt, so resultiert: $-\frac{1}{\sqrt{n}} + 3\sqrt{n} + 2n = 0$.

Wird diese Gleichung von den Wurzelzeichen befreit, so erhält man: $4n^3 - 9n^2 + 6n - 1 = 0$; da hier die beiden Wurzeln ($n = 1$ und $n = 1$) nicht in Betracht kommen können, sondern nur allein die Wurzel $n = \frac{1}{4}$, so ergiebt diese letztere das Maximum für $f(n)$; es ergiebt sich hierfür $f\left(\frac{1}{4}\right) = -0{\cdot}69$, daher $K - J = -0{\cdot}69\,K$, wonach $J = 1{\cdot}69\,K$. Der grösste Stutz des Paraboloids übersteigt (mit verglichenen Durchmessern berechnet, den Schaft um 69% der (verglichen) berechneten Schaftmasse.

Da für den Maximalstutz beim Paraboloid $\lambda = \frac{1}{4}h$ sich ergiebt, so beträgt die Höhe dieses Stutzes $l = \frac{3}{4}h$.

Für den Kegel ist $f(n) = -n + n^2 + n^3$, daher der erste Differentialquotient $\frac{d f(n)}{dn} = -1 + 2n + 3n^2$; wenn daher $3n^2 + 2n - 1 = 0$ gesetzt wird, so resultiert die quadratische Gleichung $n^2 + \frac{2}{3}n = \frac{1}{3}$, welcher die beiden reellen Wurzeln $n = \frac{1}{3}$ und $n = -1$ entsprechen, wovon jedoch hier nur die erste Berücksichtigung finden kann.

Da für den Wert $n = \frac{1}{3}$ der Ausdruck $f(n)$ das Maximum erreicht und $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27} = -0{\cdot}185$ beträgt, so wird sich der Maximalstutz hier um $0{\cdot}185\,K$ höher berechnen lassen als der Vollkegel, und beträgt die Differenz daher 18·5% der nach verglichenem Durchmesser berechneten Schaftmasse.

Hier wurde $\lambda = \frac{1}{3}h$ gefunden und besitzt daher der Maximalstutz eine Höhe von $\frac{2}{3}h$; es ist dies nach Kunze der Grund, warum einige Kubierungstafeln, welche nach der Formel $J = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 l$ arbeiten, verlangen, es möge der obere Durchmesser $\frac{1}{3}$ des unteren betragen. Findet nämlich die Entwipfelung in der Entfernung $\lambda = \frac{1}{3}h$ vom Wipfel aus gemessen statt, so ist, da dann die Proportion $D : d = h : \frac{1}{3}h$ bestehen muss, $d = \frac{D}{3}$.

Wird in die Formel 59 der Wert $m = 3$ eingeführt, so resultiert für den Neiloidstutz:

$$J = \frac{l}{8} \frac{\left(2\sqrt[3]{\gamma} - \sqrt[3]{g}\right)^4 - g\sqrt[3]{g}}{\sqrt[3]{\gamma} - \sqrt[3]{g}}$$

$$= \frac{l}{8} \frac{16\gamma\sqrt[3]{\gamma} - 32\gamma\sqrt[3]{g} + 24\sqrt[3]{\gamma^2 g^2} - 8g\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{\gamma} - \sqrt[3]{g}}$$

$$= \frac{l}{8}\left(16\gamma - 16\sqrt[3]{\gamma^2 g} + 8\sqrt[3]{\gamma g^2}\right) \text{ und daher}$$

$$J = l\gamma + l\left(\gamma - 2\sqrt[3]{\gamma^2 g} + \sqrt[3]{\gamma g^2}\right) \dots\dots\dots\dots \quad 63)$$

Diese Formel sagt uns, dass der Neiloidstutz nach der Formel $J = \gamma l$ berechnet, um $\triangle = l\left(\gamma - 2\sqrt[3]{\gamma^2 g} + \sqrt[3]{\gamma g^2}\right)$ zu klein gefunden wird.

e. **Pressler's Körperformel.** Diese gilt nur für Vollkörper.

In Nr. 34 fanden wir die Gleichung $K = \frac{1}{1+m} G h \dots\dots \alpha)$

Ist γ jene Querschnittsfläche des Stammes, deren Durchmesser δ die Hälfte beträgt von dem Durchmesser D der Endquerfläche G des Schaftes, so muss, da $G = \frac{D^2}{4}\pi$ und $\gamma = \frac{\delta^2}{4}\pi = \frac{D^2}{16}\pi$ die Proportion bestehen: $G : \gamma = 4 : 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \beta)$

Bezeichnen wir ferner mit η die Höhe, in welcher sich der auf den halben Durchmesser gesunkene Querschnitt (γ) befindet, so ist $h - \eta$ die Entfernung des letzteren vom Wipfel des Stammes und muss sonach folgende Proportion Geltung haben:

$G : \gamma = h^m : (h - \eta)^m$ und mit Rücksicht auf β

$h^m (h - \eta)^m = 4 : 1$ oder

$h : (h - \eta) = \sqrt[m]{4} : 1$, woraus

$h = \frac{\eta\sqrt[m]{4}}{\sqrt[m]{4} - 1}$. Wird dieser Wert in die Gleichung α eingeführt, so erhält man

$$K = \frac{\sqrt[m]{4}}{(1+m)\left(\sqrt[m]{4} - 1\right)} G\eta \dots\dots\dots\dots \quad 64)$$

Pressler's verallgemeinerte Kubierungsformel.

Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass der Punkt des Stammes, in dem der untere Durchmesser auf die Hälfte gesunken, der Richtpunkt, und dessen Höhe (η) die Richtpunktshöhe genannt wird.

Für den rein paraboloidisch geformten Stamm erhalten wir die Körperformel durch Substitution von $m = 1$ in die obige allgemeine Gleichung (63), nämlich:

$$K = \frac{2}{3} G \eta \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad 65)$$

Dieselbe Formel ergiebt sich nach der Einführung von $m = 2$ für den Kegelstutz.

Setzen wir in Gl. 64 für m den Wert 3, so resultiert:

$$K = \frac{\sqrt[3]{4}}{4\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)} G \eta = 0{\cdot}6756\, G \eta \quad \dots\dots\dots \quad 66)$$

der Inhalt für das Neiloid.

Nach Pressler's Formel (65) wird daher der paraboloidische und kegelförmige Stamm ganz richtig, das Neiloid aber mit $K = 0{\cdot}6\, G \eta$ offenbar zu klein erhalten, da der richtige Inhalt aus Gl. 66 sich ergiebt. Diese Differenz $\triangle$ beträgt ca. $\triangle = 0{\cdot}009\, G \eta$ oder $1{\cdot}34\,\%$ der fehlerhaft $\left(\text{nach } \frac{2}{3} G \eta\right)$ berechneten Masse.

f. **Simony's Körperformel.** Diese hat ebenso für Vollkörper als für Stutze Giltigkeit.

Auch bei der Entwickelung dieser Formel wollen wir von dem in Nr. 34 gefundenen Ausdrucke $K = \frac{1}{1+m} G h \; \dots \; a)$ ausgehen.

Bezeichnet man die Querfläche eines vollen Stammes in der Entfernung $\frac{1}{4} h$ vom unteren Ende mit γ_1, so muss, wie schon bekannt, die Proportion:

$$G : \gamma_1 = h^m : \left(\frac{3}{4} h\right)^m = 4^m : 3^m \quad \text{bestehen, woraus}$$

folgt: $G = \frac{4^m \gamma_1}{3^m}$; dieser Wert in a gesetzt, giebt:

$$K = \frac{4^m h}{(1+m) 3^m} \gamma_1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad b)$$

Ist γ_2 die Querschnittsfläche desselben Stammes in seiner halben

Länge, also in $\frac{1}{2}h$ und γ_3 der Querschnitt in $\frac{3}{4}h$ (vom Stammende gemessen), so müssten analog dem Obigen die Proportionen:

$$G:\gamma_2 = h^m:\left(\frac{1}{2}h\right)^m = 2^m:1$$

und $G:\gamma_3 = h^m:\left(\frac{1}{4}h\right)^m = 4^m:1$ stattfinden, woraus sich ergiebt:

$G = 2^m\gamma_2$ und $G = 4^m\gamma_3$. Setzt man diese Werte in die Gleichung a, so resultiert:

$$K = \frac{2^m h}{1+m}\gamma_2 \quad \ldots\ldots c) \quad \text{und} \quad K = \frac{4^m h}{1+m}\gamma_3 \quad \ldots\ldots d)$$

Aus b folgt: $2K = \frac{4^m h}{(1+m)\,3^m}\cdot 2\gamma_1 \ldots\ldots e)$

ebenso aus d: $2K = \frac{4^m h}{1+m}2\gamma_3 \ldots\ldots f)$

und aus e: $2\left(\frac{3}{4}\right)^m K = \frac{h}{1+m}2\gamma_1 \ldots\ldots g)$

wie aus f: $2\left(\frac{1}{4}\right)^m K = \frac{h}{1+m}2\gamma_3 \ldots\ldots h)$

und aus c: $\left(\frac{1}{2}\right)^m K = \frac{h}{1+m}\gamma_2 \ldots\ldots i)$

Wird von der Summe der Gleichungen g und h die Gleichung i subtrahiert, so resultiert:

$$K\cdot\left[2\left(\frac{3}{4}\right)^m + 2\left(\frac{1}{4}\right)^m - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right] = \frac{h}{1+m}\left[2\gamma_1 + 2\gamma_3 - \gamma_2\right] \quad \text{oder}$$

$$K = \frac{4^m h}{(1+m)\left[2(3^m+1) - 2^m\right]}\left[2(\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_2\right] \ldots\ldots 67)$$

Diese Gleichung stellt uns Simony's verallgemeinerte Formel vor.

Substituieren wir daselbst für den Formexponenten m die Werte: $m = 1$, 2 und 3, so ergiebt sich übereinstimmend für das Paraboloid, den Kegel und das Neiloid die eigentliche Simony'sche Kubierungsformel:

$$K = \frac{h}{3}\left[2(\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_2\right] \ldots\ldots 68)$$

Dass die Formel 68 auch für sämtliche Stutze (der typischen Stammformen) Geltung habe, kann ebenso allgemein nachgewiesen werden.

Denken wir uns den Stutz so entstanden, dass von dem Vollkörper ein Stück in der Länge a (von der Spitze aus) abgeschnitten wurde, so dass der Stutz die Länge $l = h - a$ erhielt. Es ist sonach der Inhalt J des Stutzes:

$J = \frac{1}{1+m}G(l+a) - \frac{1}{1+m}ga$, worin G und g die beiden Grundflächen des Stutzes bedeuten.

Da nun $G:g = (l+a)^m:a^m$, so ist $g = \frac{G a^m}{(l+a)^m}$ und somit

$$J = \frac{1}{1+m} G (l+a) - \frac{1}{1+m} G \frac{a^{m+1}}{(l+a)^m} \quad \text{oder}$$

$$J = \frac{G}{1+m} \frac{(l+a)^{m+1} - a^{m+1}}{(l+a)^m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; a)$$

Nun müssen folgende Proportionen stattfinden:

$$G : \gamma_1 = (l+a)^m : \left(\frac{3}{4} l + a\right)^m$$

$$G : \gamma_2 = (l+a)^m : \left(\frac{2}{4} l + a\right)^m$$

$$G : \gamma_3 = (l+a)^m : \left(\frac{1}{4} l + a\right)^m \quad \text{woraus resultiert:}$$

$$G = \frac{\gamma_1 (l+a)^m}{\left(\frac{3}{4} l+a\right)^m}, \qquad G = \frac{\gamma_2 (l+a)^m}{\left(\frac{2}{4} l+a\right)^m} \quad \text{und} \quad G = \frac{\gamma_3 (l+a)^m}{\left(\frac{1}{4} l+a\right)^m}.$$

Werden diese Werte nacheinander in die Gleichung a substituiert, so wird erhalten:

$$J = \frac{\gamma_1 4^m}{1+m} \frac{(l+a)^{m+1} - a^{m+1}}{(3l+4a)^m}, \qquad J = \frac{\gamma_3 4^m}{1+m} \frac{(l+a)^{m+1} - a^{m+1}}{(l+4a)^m}$$

$$J = \frac{\gamma_2 4^m}{1+m} \frac{(l+a)^{m+1} - a^{m+1}}{(2l+4a)^m}.$$

Multipliziert man jede dieser drei letzten Gleichungen mit dem Nenner des zweiten Quotienten ihrer rechten Seite und die beiden ersten überdies noch mit 2, so folgt:

$$2(3l+4a)^m J = \frac{2\gamma_1 4^m [(l+a)^{m+1} - a^{m+1}]}{1+m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; b)$$

$$2(l+4a)^m J = \frac{2\gamma_3 3^m [(l+a)^{m+1} - a^{m+1}]}{1+m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; c)$$

$$2(l+4a)^m J = \frac{\gamma_2 4^m [(l+a)^{m+1} - a^{m+1}]}{1+m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; d)$$

Wird von der Summe der Gleichungen b und c die Relation d subtrahiert, so ergiebt sich:

$$[2(3l+4a)^m + 2(l+4a)^m](2l+4a)^m]. \; J = \frac{4^m [(l+a)^{m+1} - a^{m+1}]}{1+m} [2\gamma_1 + 2\gamma_3 - \gamma_2]$$

woraus folgt: $J = \dfrac{4^m [(l+a)^{m+1} - a^{m+1}]}{(1+m)[2(3l+4a)^m + 2(l+4a)^m - (2l+4a)^m} [2c\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_2] \; . e)$

Nun ist:

$$(l+a)^{m+1} - a^{m+1} = l^{m+1} + \binom{m+1}{1} l^m a + \binom{m+1}{2} l^{m-1} a^2 + \binom{m+1}{3} l^{m-2} a^3 + \ldots .$$
$$+ \binom{m+1}{m} l a^m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; f)$$

Ebenso: $2(3l+4a)^m = 2(3l)^m + 2\binom{m}{1}(3l)^{m-1}.4a + \binom{m}{2}(3l)^{m-2}.(4a)^2 + \ldots .$

$$2(l+4a)^m = 2l^m + 2\binom{m}{1} l^{m-1}.4a + 2\binom{m}{2} l^{n-2}.(4a)^2 + \ldots \ldots .$$

$$(2l+4a)^m = (2l)^m + \binom{m}{1}(2l)^{m-1}.4a + \binom{m}{3}(2l)^{m-2}.(4a)^2 + \ldots .$$

sonach:

$$2(3l+4a)^m + 2(l+4a)^m - (2l+4a)^m = (2.3^m + 2 - 2^m) l^m + \binom{m}{1}(2.3^{m-1} + 2 - 2^{m-1}) l^{n-n} 4a +$$
$$+ \binom{m}{2}(2.3^{m-2} + 2 - 2^{m-2}(l^{m-2}(4a)^2 + \ldots$$

Wird nun die Entwickelung (f) durch den letzt erhaltenen Ausdruck dividiert, so erhält man gültig für $m=1$, 2 und 3 den Quotienten: $\frac{l}{2.3^m+2-2^m}$ und dieser in die Gleichung e substituiert, ergiebt:

$$J=\frac{4^m\, l}{(1+m)[2(3^m+1)-2^m]}[2(\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_2],$$ gültig zur Berechnung der Stutze der typischen Stammformen.

D. Zusammenstellung der Körperformeln.

52. a. **Allgemeine Formel für volle Schäfte:** $K=\frac{1}{1+m}Gh.$

α) für den Cylinder $K=Gh$, $K=\frac{D^2}{4}\pi h$,

β) für das Paraboloid $K=\frac{1}{2}Gh$, $K=\frac{D^2}{8}\pi h$,

γ) für den Kegel $K=\frac{1}{3}Gh$, $K=\frac{D^2}{12}\pi h$,

δ) für das Neiloid $K=\frac{1}{4}Gh$, $K=\frac{D^2}{16}\pi h$.

b. **Allgemeine Formel für die Stutze:** $J=\frac{G\sqrt[m]{G}-g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G}-\sqrt[m]{g}}$.

α) für den Paraboloidstutz:

$$J=\frac{l}{2}(G+g),\quad J=\frac{\pi l}{4}(D^2+d^2).$$

β) für den Kegelstutz:

$$J=\frac{l}{3}G+\sqrt{Gg}+g),\quad J=\frac{\pi l}{12}(D^2+Dd+d^2)$$

γ) für den Neiloidstutz:

$$J=\frac{l}{4}\left[G+\sqrt[3]{Gg}\left(\sqrt[3]{G}+\sqrt[3]{g}\right)+g\right],\quad J=\frac{\pi l}{16}\left[D^2+\sqrt[3]{D^2d^2}\left(\sqrt[3]{D^2}+\sqrt[3]{d^2}\right)+d\right]$$

Anmerkung. In den Formeln sub a und b ist G die untere Basis, D ihr Durchmesser, g die obere Grundfläche, d ihr Durchmesser, h die Höhe des Schaftes, l die Länge des Stutzes.

c. **Hossfeld's Körperformeln für volle Schäfte:**

allgemein $K=\frac{3^m}{2^m(1+m)}\mathfrak{g}h$, daher

α) für das Paraboldid
β) für den Kegel } $K=\frac{3}{4}\mathfrak{g}h$, $K=\frac{3}{16}\mathfrak{d}^2\pi h$

γ) für das Neiloid $K=\frac{27}{32}\mathfrak{g}h$, $K=\frac{27}{128}\mathfrak{d}^2\pi h$

in welchen Formeln $\mathfrak{g}$ die in $\frac{1}{3}h$ liegende Querfläche des Stammes, $\mathfrak{d}$ den Durchmesser letzterer bezeichnen.

d. **Hossfeld's Körperformeln für die Stutze:**

$$\text{allgemein:}\quad J = \frac{l}{3(1+m)2^m}\,\frac{\left(\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[m]{g}\right)^{m+1} - 2^{m+1}\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\mathfrak{g}} - \sqrt[m]{g}},\quad \text{daher}$$

α) für den Paraboloidstutz
β) für den Kegelstutz

$$J = \frac{l}{4}(3\mathfrak{g} + g,\quad J = \frac{\pi l}{16}(3\mathfrak{d}^2 + d^2)$$

γ) für den Neiloidstutz

$$J = \frac{l}{4}(3\mathfrak{g} + g) + \frac{3l}{4}\left(\frac{\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}}{2}\right)^3$$

Hier bedeutet l die Länge des Stutzes, $\mathfrak{g}$ die Querfläche in $\frac{l}{3}$, g die obere Basis des Stutzes, $\mathfrak{d}$ und d die entsprechenden Durchmesser der Querflächen $\mathfrak{g}$ und g.

e. **Newton's (Riecke's) Körperformeln für volle Schäfte:**

$$\text{allgemein:}\quad K = \frac{2^{m-1}h}{(2^{m-1}+2)(1+m)}(G + 4\gamma)\quad \text{und daher}$$

α) für das Paraboloid
β) für den Kegel
γ) für das Neiloid

$$K = \frac{h}{6}(G + 4\gamma),\quad K = \frac{h}{24}(D^2 + 4\delta^2)$$

In diesen Formeln bedeutet h die Höhe, G die untere Grundfläche des Schaftes, γ die Querfläche in $\frac{h}{2}$, D und δ die entsprechenden Durchmesser.

f. **Newton's (Riecke's) Körperformeln für die Stutze:**

$$\text{allgemein:}\quad J = \frac{l}{6}\left[\frac{G\sqrt[m]{G} - \gamma\sqrt[m]{\gamma}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{\gamma}} + \frac{\gamma\sqrt[m]{\gamma} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}}\right]\frac{3}{1+m}\quad \text{und daher}$$

α) Für den Paraboloidstutz
β) für den Kegelstutz
γ) für den Neiloidstutz

$$J = \frac{l}{6}(G + 4\gamma + g),\quad J = \frac{\pi l}{24}(D^2 + 4\delta^2 + d^2)$$

Hier ist l die Länge, G die untere, g die obere Grundfläche, γ der mittlere Schnitt des Stutzes, D, d und δ sind die entsprechenden Durchmesser.

g. **Huber's Körperformeln für volle Schäfte:**

$$\text{allgemein:}\quad K = \frac{2^m}{1+m}\gamma h\quad \text{und daher}$$

α) für das Paraboloid $K = \gamma h,\quad K = \frac{\delta^2\pi}{4}h$

β) für den Kegel $K = \frac{4}{3}\gamma h$, $K = \frac{\delta^2 \pi}{3} h$

γ) für das Neiloid $K = 2\gamma h$, $K = \frac{\delta^2 \pi}{2} h$

In diesen Formeln bedeutet h die Höhe des Schaftes, γ den Querschnitt in $\frac{h}{2}$ und δ den entsprechenden Durchmesser.

h. Huber's Körperformeln für die Stutze:

$$\text{allgemein: } J = \frac{l}{2(1+m)} \cdot \frac{\left(2\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}\right)^{m+1} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{g}} \quad \text{oder}$$

$$J = \frac{l}{2(1+m)} \cdot \frac{G\sqrt[m]{G} - \left(2\sqrt[m]{\gamma} - \sqrt[m]{G}\right)^{m+1}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{\gamma}}, \quad \text{daher}$$

α) für den Paraboloidstutz $J = \gamma l$, $J = \frac{\delta^2}{4}\pi l$

β) für den Kegelstutz $J = \gamma l + \frac{l}{3}(\sqrt{\gamma} - \sqrt{g})^2$,

$$J = \frac{\delta^2}{4}\pi l + \frac{l\pi}{12}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2$$

γ) für den Neiloidstutz $J = \gamma l + \frac{l}{6}(G - 2\gamma + g)$[1] oder

$$J = l\gamma + l\left(\gamma - 2\sqrt[3]{\gamma^2 g} + \sqrt[3]{\gamma g^2}\right).$$

Hier bedeuten G die untere, g die obere Basis, γ den mittleren bei $\frac{l}{2}$ geführten Schnitt, l die Länge des Stutzes, D und d die Durchmesser von G und g.

i. Pressler's Körperformeln für ganze Schäfte:

$$\text{allgemein: } K = \frac{\sqrt[m]{4}}{(1+m)(\sqrt[m]{4} - 1)} G\eta, \quad \text{daher}$$

a) für das Paraboloid
β) für den Kegel } $K = \frac{2}{3} G\eta$, $K = \frac{1}{6} D^2 \pi \eta$

γ) für das Neiloid $K = 0{\cdot}6756\, G\eta$, $K = 0{\cdot}1689\, D^2 \pi \eta$.

Hier ist G die untere Basis, D ihr Durchmesser, η die Richtpunktshöhe.

k. Simony's Körperformel für volle Schäfte und Stutze:

$$\text{allgemein: } K = \frac{4^m h}{(m+1)[2(3^m + 1) - 2^m]}[2(\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_2] = J$$

---

[1]) Kann leicht aus der Riecke'schen Formel erhalten werden.

α) für das Paraboloid
β) für den Kegel
γ) für das Neiloid
δ) für den Paraboloidstutz
ε) für den Kegelstutz
ζ) für den Neiloidstutz

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\text{–}\zeta\end{array}\right\} \quad K=\frac{h}{3}\left[2(\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_2\right]=J \text{ oder } \quad K=\frac{\pi h}{12}\left[2(\delta_1{}^2+\delta_3{}^2)-\delta_2{}^2\right]=J.$$

E. Untersuchung der vorstehenden Formeln auf ihre allgemeine Gültigkeit.

53. Aus der vorstehenden Zusammenstellung der bekannten Kubierungsformeln geht hervor, dass nur in Ausnahmsfällen Schäfte oder Stutze der drei typischen Stammformen (Paraboloid, Kegel oder Neiloid) nach übereinstimmenden Formeln kubiert werden dürfen. So finden wir bei Hossfeld eine Übereinstimmung in der Berechnung des Paraboloides und des Kegels einerseits und deren Stutzen anderseits. Dasselbe ist für die Schaftberechnung nach Pressler gezeigt worden. Nur Newton's (Riecke's) und Simony's Formeln stimmen für alle Typen überein, sowohl für die ganzen Schäfte als auch deren Stutze. Bei Huber's Formeln findet, so wie bei den allgemein stereometrischen Formeln, gar keine Übereinstimmung statt. — Nun hat sich in der Praxis die Ansicht festgesetzt, dass, wenn nach derselben Formel zwei resp. alle drei typischen Gestalten sich rechnen lassen, dieselbe Formel auch für sämtliche Zwischengestalten (deren Erzeugende die Gleichung $y^2 = px^m$ hat) volle Geltung haben müsse, und wird es sich deshalb lohnen, wenigstens bei einigen der angeführten Formeln zu zeigen, inwieweit diese Anschauung richtig ist. —

a. **Hossfeld's Körperformel.** Wir fanden hierfür die allgemeine Form $K = \frac{3^m}{2^m(1+m)}\, g h$; für einen Umdrehungskörper, der die Mitte zwischen Cylinder und Paraboloid einhält, ist $m = 0{\cdot}5$, und wird dieser Wert in die Inhaltsformel eingeführt, so resultiert $K = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(1\cdot 5)}\, g h = 0\cdot 817\, g h$; dieses Resultat weicht aber von der für das Paraboloid gefundenen Grösse $K = \frac{3}{4} g h = 0\cdot 75\, g h$ um $\Delta = 0\cdot 067\, g h$ ab, was ca. $9\,^0/_0$ von $\frac{3}{4} g h$ ausmacht, um welche der fragliche Umdrehungskörper grösser ist als die nach $K = \frac{3}{4} g h$ berechnete Masse. —

Für $m = 1{\cdot}5$, d. h. für einen Körper, der die Mitte hält zwischen Paraboloid und Kegel, ergiebt sich $K = 0\cdot 702\, g h$; hier stellt sich die nach dieser Formel berechnete Masse um ca. $6\cdot 4\,^0/_0$ (von $\frac{3}{4} g h$)

kleiner dar. Für $m = 1 \cdot 25$ ist $K = 0 \cdot 738 \mathfrak{g} h$, für $m = 1 \cdot 75$ ist $K = 0 \cdot 739 \mathfrak{g} h$ die richtige Formel. —

Mathematisch richtig sind daher die Hossfeld'schen Formeln bloss für den Kegel und das Paraboloid. Für den Cylinder wäre die richtige Formel $K = \mathfrak{g} h$.

Selbstverständlich gilt Ähnliches für die Stutze, wenn auch hier der Prozentsatz für den Fehler von g (der oberen Grundfläche) beeinflusst wird, daher für dasselbe m verschieden sein kann.

b. **Newton's (Riecke's) Körperformeln.** Wir fanden weiter oben für die Berechnung ganzer Schäfte die allgemeine Formel:

$$K = \frac{2^{m-1} h}{(2^{m-1} + 2)(1 + m)} (G + 4\gamma).$$

Wird zunächst $Q = 0 \cdot 5$ eingeführt, so erhält man

$$K = \frac{2^{-\frac{3}{2}} h}{(2^{-\frac{3}{2}} + 1) \, 1 \cdot 5} (G + 4\gamma)$$

Daraus berechnet sich das richtige $K = 0 \cdot 17414 \, (G + 4\gamma)$
nach Newton $K = 0 \cdot 16667 \, (G + 4\gamma)$
Daher die Differenz $\varDelta = 0 \cdot 00747 \, (G + 4\gamma)$ was ca. $4 \cdot 4\,^0/_0$ ausmacht.

Nach der Newton'schen Formel wird daher der Inhalt dieses Körpers um ca. $4 \cdot 4\,^0/_0$ von $K = \frac{1}{6} (G + 4\gamma)$ zu klein berechnet.*)

Ist $m = 1 \cdot 5$, so ergiebt eine einfache Rechnung, dass dieser Umdrehungskörper nach der Newton'schen Formel um $0 \cdot 44\,^0/_0$ von $\frac{1}{6} (G + 4\gamma)$ zu gross gefunden wird. Für $m = 2 \cdot 5$ beträgt die Differenz ca. $0 \cdot 42\,^0/_0$ von $\frac{1}{6} (G + 4\gamma)$, um welche die Newton'sche Formel den Inhalt zu klein finden lässt.

Selbstverständlich ist es, dass auch bei den betreffenden Stutzen in der Berechnung Differenzen auftreten müssen. —

c. **Huber's Körperformeln.** Obwohl hier gar keine Übereinstimmung in der Inhaltsberechnung der typischen Formen stattfindet, so dass nur der Inhalt des Paraboloids nach der eigentlichen Huber'schen Formel ($K = \gamma h$) richtig gefunden werden kann, während der Kegel nach $K = \frac{4}{3} \gamma h$ zu berechnen ist, daher dessen Inhalt nach $K = \gamma h$ ermittelt um die Differenz $\varDelta = \frac{1}{3} \gamma h$, daher um $33 \cdot 3\,^0/_0$

---

*) Der Cylinder würde richtig nach der Formel $K = \frac{1}{5} (G + 4\gamma)$ berechnet werden und wird somit nach $K = \frac{1}{6} (G + 4\gamma)$ derselbe um $20\,^0/_0$ der letzteren Masse zu klein bestimmt.

(von γh) und das Neiloid gar um 100% (von γh) zu klein gefunden wird, so hat doch wenigstens die Untersuchung der ausgebauchten Formen einiges Interesse, da die falsche Ansicht, dass jeder ausgebauchte Stamm nach der Formel $K = \gamma h$ sich der Theorie nach mathematisch richtig berechnen lassen müsse, ziemlich verbreitet ist. — Die allgemeine Formel Huber's wurde weiter oben als $K = \frac{2^m}{1+m} \gamma h$ gefunden.

Ist $m = 0 \cdot 5$, so ergiebt sich $K_1 = 0 \cdot 94 \gamma h$; es wird daher ein Stamm, der die Mitte zwischen Cylinder und Paraboloid hält, nach der Formel $K = \gamma h$ um $\Delta = 0 \cdot 06 \gamma h$ oder ca. um 6% (von γh) zu gross berechnet.

Ist $m = 1 \cdot 5$, so wird $K_2 = \frac{\sqrt{8}}{2 \cdot 5} \gamma h = 1 \cdot 17 \gamma h$ gefunden und beträgt daher hier der Fehler $\Delta = 0 \cdot 17 \gamma h$, d. h. ein Stamm, der die Mitte hält zwischen Paraboloid und Kegel, wird nach $K = \gamma h$ um $0 \cdot 17 \gamma h$ oder 17% zu klein gefunden. —

d. **Pressler's Körperformeln.** Die allgemeine Form wurde weiter oben gefunden mit

$$K = \frac{\sqrt[m]{4}}{(1+m)(\sqrt[m]{4} - 1)} G\eta.$$

Für $m = 0 \cdot 5$ ergiebt sich $K_1 = 0 \cdot 711\, G\eta$; nach der Richthöhenmethode von Pressler ist aber $K = \frac{2}{3} G\eta$; es wird daher ein zwischen Cylinder und Paraboloid die Mitte haltender Stamm um $\Delta = 0 \cdot 044\, G\eta$ oder um ca. 6·6% (von $\frac{2}{3} G\eta$) zu klein gefunden.

Für $m = 1 \cdot 5$ ist $K_2 = \frac{2 \cdot 5198}{3 \cdot 7995} G\eta = 0 \cdot 6632\, G\eta$, daher $\Delta = 0 \cdot 0035\, G\eta$ oder ca. 0·53%, d. h. der zwischen Paraboloid und Kegel in der Mitte stehende Stamm wird nach Pressler's Methode um ca. 0·53% zu gross berechnet.

Für $m = 2 \cdot 5$ ergiebt sich $K_3 = \frac{\sqrt[5]{16}}{3 \cdot 5(\sqrt[5]{16} - 1)} G\eta = \frac{1 \cdot 741}{2 \cdot 5935} G\eta = 0 \cdot 671\, G\eta$, d. h. ein in der Mitte zwischen Kegel und Neiloid stehender Stamm wird nach Pressler's Methode blos um $\Delta = 0 \cdot 004\, G\eta$ oder ca. 0·6% zu klein berechnet. —

e. **Simony's Körperformel.** Wird in die verallgemeinerte Formel

$K = \frac{4^m h}{(1+m)[2(3^m+1)-2^m]}[2(\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_2]$ für $m = 0 \cdot 5$ substituiert, so resultiert $K = \frac{h}{3 \cdot 037416}[2(\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_2]$, d. h. es wird in diesem Falle der Körperinhalt jener Stammform, welche die Mitte hält zwischen Cylinder und Paraboloid, kleiner gefunden als nach der speziellen Formel Simony's. Die Differenz beträgt 1·23 % von dem nach letzterer Formel gefundenen Inhalt.

Für $m = 1 \cdot 5$ erhält man $K = \frac{h}{2 \cdot 98871178}[2(\gamma_1+\gamma_3)-\gamma_2]$, d. h. die in der Mitte liegende Zwischenform des Paraboloides und Kegels wird nach Simony's Formel zu klein gefunden und zwar um 0·38 %.

Für $m = 2 \cdot 5$ ist $K = \frac{\lambda}{3 \cdot 01001}$, d. h. die in der Mitte des Kegels und Neiloides liegende Stammform wird nach Simony's Formel zu gross gefunden und zwar um ca. 0·3 %.

Im Vorstehenden ist zur Genüge nachgewiesen, dass die üblichen Formeln zur stereometrischen Kubierung des Holzes keine streng wissenschaftliche Berechtigung in sich tragen und dass, selbst wenn die Annahme richtig wäre, die Stämme unserer Waldbäume seien Umdrehungskörper mit Schaftkurven, welchen die Gleichung $y^2 = px^m$ entspricht, keine der angeführten Formeln (mit Ausnahme der allgemeinen, worin der Formexponent erscheint), vom theoretischen Standpunkt betrachtet, genüge. — Bedenklicher wird die Sache noch, wenn die Ungleichmässigkeit der Werte des Formexponenten in Erwägung gezogen wird.

Es mag für Zwecke der Praxis gestattet sein, von der einen oder der anderen dieser Formeln Gebrauch zu machen, wie dies ohne grosse Gefahr mit der Simony'schen und der Newton'schen der Fall wäre, wenn nicht wieder andere Umstände, welche weiter unten erwähnt sind, die Anwendung (der Newton'schen) verleiden würden; es muss aber anderseits wieder in Hinsicht auf das bis nun über Kubierung Vorgetragene vor unvorsichtiger Anwendung mancher Formeln, wie z. B. der Huber'schen, selbst für Zwecke der Praxis ausdrücklich gewarnt werden. Ganz unbrauchbar ist, wie weiter oben nachgewiesen wurde, die kubische Berechnung aus dem „verglichenen Durchmesser". Smalian's Formel ist ebenfalls nicht zu benutzen. Die Erkenntnis des Umstandes, dass der Baumstamm nicht regulär wächst, d. h. dass den einzelnen Teilen Eines Schaftes nicht derselbe Formexponent zukommt, was allerdings bei vielen Stämmen durch

blosse Autopsie zu konstatieren ist, was aber, wie aus Nr. 7 hervorgeht, durch Messung und Rechnung scharf bestimmt werden kann, hat schon frühzeitig gegen die üblichen Formeln ein gewisses Misstrauen hervorgerufen, und man befand sich alsbald auf der Suche nach Mitteln, welche einen Schaft oder ein längeres Schaftstück mit grösserer Verlässlichkeit zu bestimmen gestatten sollten. — Man fand diese in der sogenannten sektionsweisen Kubierung. Sie dient entweder wissenschaftlichen Zwecken oder auch jenen der Praxis. Im Prinzipe ist hierin wohl kein Unterschied zu machen, wohl aber in der Durchführung der Arbeit, was sich übrigens aus dem Folgenden ergeben wird. —

F. Sektionsweises Kubieren.

54. Handelt es sich um das sektionsweise Kubieren eines ganzen Schaftes oder eines Anteiles desselben, so wird im allgemeinen der zu kubierende Körper gewöhnlich in gleich lange Stücke (Sektionen, Stutze, eventuell Wipfelstück) geteilt gedacht; an diesen werden die nötigen Dimensionen ermittelt und in eine der weiter unten entwickelten Formeln eingesetzt. Wir unterscheiden hier mehrere Verfahren:

a. **Sektionsweises Kubieren unter Benutzung des Formexponenten.** Wir fanden in Nr. 35 für die Berechnung des Schaftstutzes im allgemeinen die Formel

$$J = \frac{l}{1+m} \; \frac{G\sqrt[m]{G} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

welche als solche unmittelbar zur sektionsweisen Berechnung verwendet werden kann, wenn an Stelle des l die gewählte Sektionslänge (λ) und die ihr entsprechenden Querschnittsflächen substituiert werden. Die Berechnung der betreffenden Formexponenten lehrt der Absatz Nr. 7. — Hier wird es vorteilhaft sein, die Stämme aus ungleich langen Sektionen zu berechnen, indem man die letzteren so abgrenzt, dass innerhalb derselben Sektion der Wuchs als ziemlich gleichförmig betrachtet werden kann. —

Selbstverständlich kann die Berechnung nach obiger Formel nur auf logarithmischem Wege erfolgen und wird selbe durch die Gauss'sche Tafel zur Berechnung des Logarithmus einer Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen bekannt sind, wesentlich gefördert.

b. **Sektionsweises Kubieren nach der Formel von Smalian.** Die von Smalian empfohlene Formel der verglichenen Grundflächen $J = l\frac{G+g}{2}$ wird ebenfalls zur sektionsweisen Kubierung verwendet. Sind auf dem Stamm Fig. 24 von dessen Abschnitte aus die gleich

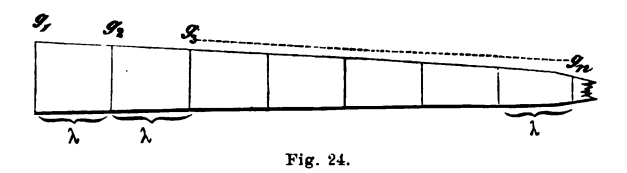


Fig. 24.

(λ) langen Sektionen aufgetragen, so ist der Inhalt des aus $(n-1)$ Stücken bestehenden Schaftteiles oder Schaftes

$$K = (g_1 + g_2)\frac{\lambda}{2} + (g_2 + g_3)\frac{\lambda}{2} + (g_3 + g_4)\frac{\lambda}{2} + \cdots + (g_{n-1} + g_n)\frac{\lambda}{2},$$

$$\text{oder} \quad K = (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + \cdots\cdots + 2g_{n-1} + g_n)\frac{\lambda}{2},$$

$$\text{oder} \quad K = \left[\frac{g_1 + g_n}{2} + g_2 + g_3 + \cdots\cdots + g_n\right]\frac{\lambda}{2} \quad \ldots . \quad 70)$$

c. **Sektionsweises Kubieren nach der Formel von Hossfeld.** Die von Hossfeld aufgestellte Formel $J = \frac{l}{4}(3\mathfrak{g} + g)$ kann auch zur sektionsweisen Berechnung benutzt werden. Wird nämlich der Schaft vom Stammende aus wieder in λ lange Sektionen geteilt

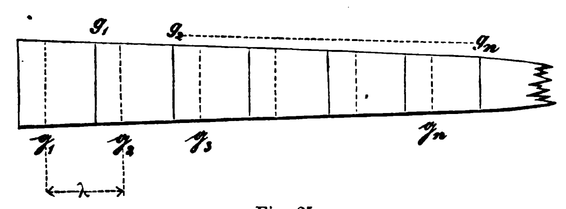


Fig. 25.

gedacht, und sind g_1, g_2, $g_3 \ldots . g_n$ die Grundflächen der so entstandenen Stutze, ebenso $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3 \ldots . . \mathfrak{g}_n$ die in $\frac{\lambda}{3}$ bestimmten Querflächen letzterer, so ist der Körperinhalt des von den Sektionen zusammengesetzten Schaftstückes

$$K = (3\mathfrak{g}_1 + g_1)\frac{\lambda}{4} + (3\mathfrak{g}_2 + g_2)\frac{\lambda}{4} + (3\mathfrak{g}_3 + g_3)\frac{\lambda}{4} + \cdots + (3\mathfrak{g}_n + g_n)\frac{\lambda}{4},$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{oder } K = [3\,(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3 + \ldots + \mathfrak{g}_n) + g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n]\,\frac{\lambda}{4} \\ \text{oder kürzer } K = [3\,\Sigma(\mathfrak{g}) + \Sigma(g)]\,\frac{\lambda}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\ 71)$$

d. **Sektionsweises Kubieren nach Riecke's Formel.** Auch Newton's (Riecke's) Formel $J = \frac{l}{6}(G + 4\gamma + g)$ wird zur sektionsweisen Kubierung verwendet. Da die Querfläche G von γ ebenso weit absteht, wie γ von g, so erscheint es hier von Vorteil, die einzelnen Stutze 2λ lang zu machen und die aufeinanderfolgenden

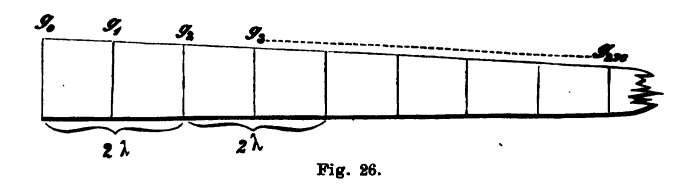


Fig. 26.

Querflächen mit g_0, g_1, g_2, g_3 ..... zu bezeichnen, wie dies in vorstehender Figur 26 versinnlicht ist. Wir erhalten daher den körperlichen Inhalt des in Sektionen getheilten Schaftstückes:

$$K = (g_0 + 4g_1 + g_2)\frac{\lambda}{3} + (g_2 + 4g_3 + g_4)\frac{\lambda}{3} + \cdots\cdots$$
$$+ (g_{2n-2} + 4g_{2n-1} + g_{2n})\frac{\lambda}{3}, \text{ oder}$$

$$K = [g_0 + g_{2n} + 2\,(g_2 + g_4 + g_6 + \cdots\cdots + g_{2n-2})$$
$$+ 4\,(g_1 + g_3 + g_5 + \cdots\cdots + g_{2n-1})]\,\frac{\lambda}{3} \quad \ldots\ldots\ 72)$$

Diese Formel ist der mathematische Ausdruck der sogenannten Sympson'schen Regel.

e. **Sektionsweises Kubieren nach Huber.** Huber's Formel für den Paraboloidstutz $J = \gamma l$ bildet ebenfalls den Ausgangspunkt zur sektionsweisen Berechnung des Körperinhaltes.

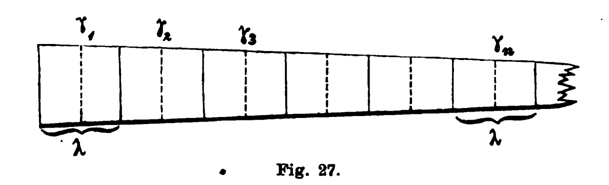


Fig. 27.

Werden hier Fig. 27 die Sektionen in den gleichen Längen λ

abgeteilt und die Querflächen in $\frac{\lambda}{2}$ der Sektionen als $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots \gamma_n$ bestimmt, so ergiebt sich der kubische Inhalt des so geteilten Schaftstückes:

$$K = \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 \lambda + \cdots\cdots + \gamma_n \lambda, \text{ oder}$$
$$K = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots\cdots + \gamma_n)\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 73)$$

f. **Sektionsweises Kubieren nach Simony.** Wird ein Stamm oder Schaftsück in eine durch 4 teilbare Zahl ($4n$) von λ langen Sektionen geteilt, so ergiebt sich dessen Inhalt

$$K = \frac{4\lambda}{3}[2(\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_2] + \frac{4\lambda}{3}[2(\gamma_5 + \gamma_7) - \gamma_6] + \frac{4\lambda}{3}[2(\gamma_9 + \gamma_{11}) - \gamma_{10}] + \cdots$$

daher auch

$$K = \frac{4\lambda}{3}[2(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5 + \cdots + \gamma_{4n-1}) - (\gamma_2 + \gamma_6 + \gamma_{10} + \cdots + \gamma_{4n-2})] \quad . \quad 74)$$

Wie aus dieser Formel hervorgeht, werden auch hier die beiden Endquerflächen (γ_0 und γ_{4n}) nicht in die Rechnung gezogen.

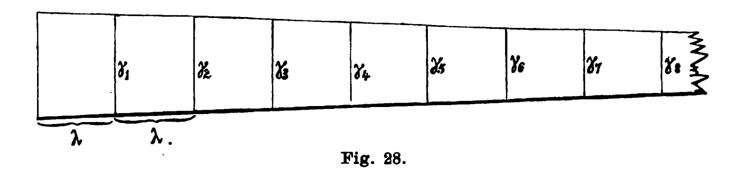


Fig. 28.

Es sei hier noch bemerkt, dass bei allen Methoden der sektionsweisen Kubierung die Messung vom Stammende (stärkeren Ende) beginnt und dass das oben restierende Zopfstück für sich kubiert werden muss. —

G. Beispiel zur Kubierung von Stämmen.

Als Beispiel seien hier die bereits sub Nr. 7 mitgeteilten Daten benutzt, welchen in der folgenden Übersicht noch die Querflächen in cm^2 und deren Logarithmen beigefügt erscheinen.

Zu der sub a folgenden Berechnung nach der Formexponentenmethode sei bemerkt, dass, da die Formel hierzu logarithmisch unbrauchbar erscheint, die von Gauss aufgestellte Tafel, welche die Berechnung des Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen nur gegeben sind, ermöglicht, mit Vorteil benützt werden konnte.

Wir fanden diese Tafel den Vega'schen Logarithmen beigegeben.

Die anderen Berechnungsweisen sind für sich klar.

Sektion	x in Metern	y Durchmesser in cm	g Grundfläche in cm²	$\log g$	m Formexpon.	Bemerkung
0	2·9	7·6	45·3646	1·65672	.	**Des ganzen Schaftes m = 1·309.**
1	4·5	11·2	98·5203	1·99352	1·765	
2	6·1	15·9	198·5565	2·29788	2·304	Des ganzen Schaftes
3	7·7	19·4	295·5925	2·47069	1·708	obere Hälfte hat $m = 1·496$
4	9·3	21·7	369·8361	2·56801	1·187	untere „ „ $m = 0·998$
5	10·9	23·2	422·7327	2·62606	0·842	
6	12·5	24·8	483·0513	2·68399	0·974	Des ganzen Schaftes
7	14·1	26·1	535·0211	2·72837	0·848	oberstes Drittel hat $m = 1·619$
8	15·7	27·7	602·6282	2·78005	1·107	mittleres „ „ $m = 0·806$
9	17·3	28·9	655·9724	2·81688	0·874	unteres „ „ $m = 1·251$
10	18·9	29·7	692·7919	2·84060	0·617	
11	20·5	30·6	735·4154	2·86653	0·735	
12	22·1	31·2	764·5380	2·88340	0·517	Die sechs gleich langen Sektionen des Schaftstutzes haben von
13	23·7	32·1	809·2821	2·90810	0·814	oben aus gerechnet folgende Exponenten:
14	25·3	33·4	876·1588	2·94258	1·215	
15	26·9	34·8	951·1486	2·97825	1·339	$m_1 = 1·919$, $m_2 = 1.014$,
16	28·5	36·4	1040·6212	3·01728	1·558	$m_3 = 0·942$, $m_4 = 0·625$,
17	30·1	37·8	1122·2083	3·05007	1·382	$m_5 = 1·111$, $m_6 = 1·418$,
18	31·7	39·1	1200·7246	3·07943	1·306	

Es seien mit diesen Daten die Inhaltsberechnungen des Schaftstückes durchzuführen und zwar:

a. **Nach der Formexponentenmethode.**

α) Als Ganzes aus g_{18}, g_0, $l = 28·8\,m$ und $m = 1·309$.

Es ist $J = \dfrac{g_{18}\sqrt[m]{g_{18}} - g_0\sqrt[m]{g_0}}{\sqrt[m]{g_{18}} - \sqrt[m]{g_0}} \cdot \dfrac{l}{1+m}$, daher

$$\log J = \log\left(g_{18}\sqrt[m]{g_{18}} - g_0\sqrt[m]{g_0}\right) + \log l - \left[\log\left(\sqrt[m]{g_{18}} - \sqrt[m]{g_0}\right) + \log(1+m)\right].$$

$\log g_{18} = 3·07943$ | $\log g_0 = 1·65672$

$\frac{1}{m}\log g_{18} = 2·35258 = \log c$ | $\frac{1}{m}\log g_0 = 1·26564 = \log d$

$\log g_{18} + \frac{1}{m}\log g_{18} = 5·43201 = \log a$, | $\log g_0 + \frac{1}{m}\log g_0 = 2·92236 = \log b$

$2·92236 = \log b$

$2·50965 = \log a - \log b$

Aus Gauss' Tafel C $= 2·51134$, dazu gehöriges $B = 0·00134$

Differenz $=$ 169 entspricht in $B =$ 1

somit richtiges $B = 0·00135$ dieses subtrahiert von $\log a$

$\log a = 5·43201$

giebt $\log(a - b) = 5·43066 = \log\left(g_{18}\sqrt[m]{g_{18}} - g_0\sqrt[m]{g_0}\right)$.

Ferner $2\cdot35258 = \log c$
$1\cdot26564 = \log d$
$1\cdot08694 = \log c - \log d.$

Aus Gauss' Tafel $C = 1\cdot08708$, dazu gehöriges $B = 0\cdot03708$
Differenz 14 entspricht in $B =$ 2
daher $B = 0\cdot03710$ dieses ab von
$\log c = 2\cdot35258$
giebt $\log(c-d = 2\cdot31548 = \log(\sqrt[m]{g_{18}} - \sqrt[m]{g_0})$.

Es wurde gefunden:

$\log(a-b) = 5\cdot43066$
hierzu $\log l(\text{in cm}) = 3\cdot45939$
$\log(a-b) + \log l = 8\cdot89005$

$\log(c-d) = 2\cdot31548$
hierzu $\log(1+m) = 0\cdot36342$
$\log(c-d) + \log(1+m) = 2\cdot67890$

$\log(c-d) + \log(1+m) = 2\cdot67890$
$\log J = 6\cdot21115$, daher $J = 1626000\,cm^3 = 1\cdot6260 m^3$.

β) Aus zwei Sektionen und zwar:

Obere Hälfte aus: $g_9, g_0, l = 14\cdot4 m$, $m = 1\cdot496$ giebt $J_{\text{I}} = 0\cdot44943 m^3$
Untere „ „ $g_{18}, g_9, l = 14\cdot4 m$, $m = 0\cdot998$ „ $J_{\text{II}} = 1\cdot33670 m^3$
daher $J = 1\cdot78613 m^3$.

γ) Aus drei Sektionen und zwar:

Oberes Drittel aus: $g_6, g_0, l = 9\cdot6 m$, $m = 1\cdot619$ ergiebt $J_{\text{I}} = 0\cdot22553$
Mittleres „ „ $g_{12}, g_6, l = 9\cdot6 m$, $m = 0\cdot806$ „ $J_{\text{II}} = 0\cdot60133$
Unteres „ „ $g_{18}, g_{12}, l = 9\cdot6 m$, $m = 1\cdot251$ „ $J_{\text{III}} = 0\cdot94014$
daher $J = 1\cdot76700$.

δ) Aus 6 Sektionen ergab sich

$J_1 = 0\cdot07341$
$J_2 = 0\cdot18683$
$J_3 = 0\cdot27340$
$J_4 = 0\cdot34132$
$J_5 = 0\cdot41165$
$J_6 = 0\cdot51573$
daher $J = 1\cdot80234 m^3$

ε) Aus 18 Sektionen ergab sich

$J_1 = 0\cdot01127$
$J_2 = 0\cdot02324$
$J_3 = 0\cdot03932$
$J_4 = 0\cdot05320$
$J_5 = 0\cdot06352$
$J_6 = 0\cdot07245$
$J_7 = 0\cdot08148$
$J_8 = 0\cdot09097$
$J_9 = 0\cdot10069$
$J_{10} = 0\cdot10790$
$J_{11} = 0\cdot11432$
$J_{12} = 0\cdot12000$
$J_{13} = 0\cdot12590$
$J_{14} = 0\cdot13469$
$J_{15} = 0\cdot14618$
$J_{16} = 0\cdot15926$
$J_{17} = 0\cdot17301$
$J_{18} = 0\cdot18572$
daher $J = 1\cdot80312 m^3$.

b. **Nach der von Smalian empfohlenen Formel** und zwar:

α) Als Ganzes $J = (45 \cdot 364 + 1200 \cdot 7246) 1440 = 1 \cdot 79434 m^3$.

β) Aus zwei gleich langen Sektionen nach der Formel:

$$J = \left[\frac{g_0 + g_{18}}{2} + g_9\right] \lambda_1 = 1 \cdot 84178 m^3.$$

γ) Aus drei gleich langen Sektionen nach der Formel:

$$J = \left[\frac{g_0 + g_{18}}{2} + g_6 + g_{12}\right] \lambda_2 = 1 \cdot 79581 m^3.$$

δ) Aus sechs gleich langen Sektionen nach der Formel:

$$J = \left[\frac{g_0 + g_{18}}{2} + g_{15} + g_{12} + g_9 + g_6 + g_3\right] \lambda_3 = 1 \cdot 81121 m^3.$$

ε) Aus achtzehn Sektionen nach der Formel:

$$J = \left[\frac{g_0 + g_{18}}{2} + g_1 + g_2 + g_3 + \cdots\cdots + g_{17}\right] \lambda_4 = 1 \cdot 80434 m^3.$$

c. **Nach der Hossfeld'schen Formel** und zwar:

α) Als Ganzes $J = \frac{l}{4} (3\mathfrak{g} + g)$

wo $l = 28 \cdot 2 m$. $\mathfrak{g} = 764 \cdot 5380 cm^2$ und $g = 45 \cdot 3646 cm^2$.
Es ergiebt sich $J = 1 \cdot 68406 m^3$.

β) Aus zwei Sektionen nach der Formel:

$J = [3 (g_{15} + g_6) + g_9 + g_0] \frac{\lambda}{4}$, wo $\lambda = 14 \cdot 4 m$, daher $\frac{\lambda}{4} = 3 \cdot 8 m$; man findet

$$J = 1 \cdot 90150 m^3.$$

γ) Aus drei Sektionen nach der Formel:

$$J = \frac{\lambda}{4} [(g_{16} + g_{10} + g_4)\, 3 + g_{12} + g_6 + g_0],$$

worin $\lambda = 9 \cdot 6 m$, daher $\frac{\lambda}{4} = 2 \cdot 4 m$.

Man findet $J = 1 \cdot 82465 m^3$.

δ) Aus sechs Sektionen nach der Formel:

$$J = \frac{\lambda}{4} [(g_{17} + g_{14} + g_{11} + g_8 + g_5 + g_2)\, 3 + g_{15} + g_{12} + g_9 + g_6 + g_3 + g_0],$$

worin $\lambda = 4 \cdot 8 m$, daher $\frac{\lambda}{4} = 1 \cdot 2 m$, daher $J = 1 \cdot 80825 m^3$.

d. **Nach der Sympson'schen Regel** und zwar:

α) Als Ganzes nach der Formel (Riecke):

$$J = \frac{l}{6}(g_{18} + 4g_9 + g_0), \text{ worin } l = 28\cdot8\,m, \text{ daher } \frac{l}{6} = 4\cdot8\,m.$$

Wir finden $J = 1\cdot85759\,m^3$.

β) Aus drei Doppelsektionen nach der Formel:

$$J = \frac{\lambda}{3}[g_{18} + g_0 + 2(g_{12} + g_6) + 4(g_{15} + g_9 + g_3)],$$

worin $2\lambda = 9\cdot6\,m$, daher $\frac{\lambda}{3} = 1\cdot6\,m$.

Es ergiebt sich $J = 1\cdot81634\,m^3$.

γ) Aus neun Doppelsektionen nach der Formel:

$$J = \frac{\lambda}{3}[g_{18} + g_0 + 2(g_{16} + g_{14} + g_{12} + \cdots\cdots\cdots + g_2) + 4(g_{17} + g_{15} + g_{13} + \cdots\cdots\cdots + g_1)],$$

worin $2\lambda = 3\cdot2\,m$, daher $\frac{\lambda}{3} = \frac{1\cdot6}{3}\,m$.

Wir erhalten $J = 1\cdot80299\,m^3$.

e. **Nach Huber's Formel** und zwar:

α) Als Ganzes nach der Formel $J = g_9 l$, worin $l = 28\cdot8\,m$. Es folgt $J = 1\cdot88920\,m^3$.

β) Aus drei Sektionen nach der Formel:

$$J = \lambda[g_{15} + g_9 + g_3], \text{ worin } \lambda = 9\cdot6\,m.$$

Wir finden $J = 1\cdot82660\,m^3$.

γ) Aus neun Sektionen nach der Formel:

$$J = \lambda[g_{17} + g_{15} + g_{13} + \cdots\cdots\cdots + g_1], \text{ worin } \lambda = 3\cdot2\,m$$

ergiebt sich $J = 1\cdot80029$.

f. **Nach Simony's Formel:**

Da der Stammabschnitt in unserem Beispiele aus 18 Sektionen besteht, so sind wir gezwungen, bloss die untersten 16 Sektionen (zwischen γ_{18} und γ_2) zu der Rechnung nach der Simony'schen Methode zu verwenden; um aber dennoch einen Vergleich mit den auf anderen Wegen erzielten Resultaten anstellen zu können, werden wir das vernachlässigte Stück $J_1 + J_2 = 0\cdot03451\,m^3$, wie es sich nach der Formexponentenmethode ergab, zu den Ergebnissen addieren.

α) Berechnung, wenn der Stammabschnitt als Ganzes nach der Formel $J = \frac{l}{3}[2(\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_2]$ kubiert werden soll; daher eigentlich aus 4 Sektionen.

$$\begin{array}{r} \gamma_{14} = 876 \cdot 1588 \\ \gamma_6 = 483 \cdot 0513 \\ \hline 1359 \cdot 2101 \;{}_2 \\ \hline 2718 \cdot 4202 \\ \gamma_{10} = 692 \cdot 7919 \\ \hline 2025 \cdot 6283 : 3 \\ \hline 675 \cdot 2094 \times 25 \cdot 6 \\ \hline 1 \cdot 72854 m^3 \\ J_1 + J_2 = 0 \cdot 03451 \\ \hline J = 1 \cdot 76305 m^3. \end{array}$$

β) Berechnung aus acht Sektionen:

$$\begin{array}{r} \gamma_{16} = 1040 \cdot 6212 \\ \gamma_{12} = 764 \cdot 5380 \\ \gamma_8 = 602 \cdot 6282 \\ \gamma_4 = 369 \cdot 8361 \\ \hline 2777 \cdot 6235 \;{}_2 \\ \hline 5555 \cdot 2470 \\ 1359 \cdot 2101 \\ \hline 4196 \cdot 0369 \times 4 \cdot 26 \\ \hline 1 \cdot 79031 \\ J_1 + J_2 = 0 \cdot 03451 \\ \hline J = 1 \cdot 82482 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \gamma_{14} = 876 \cdot 1588 \\ \gamma_6 = 483 \cdot 0513 \\ \hline 1359 \cdot 2101 \end{array}$$

γ) Aus zwölf Sektionen:

$$\begin{array}{r} g_{17} = 1122 \cdot 2083 \\ g_{15} = 951 \cdot 1486 \\ g_{13} = 809 \cdot 2821 \\ g_{11} = 735 \cdot 4154 \\ g_9 = 655 \cdot 9724 \\ g_7 = 535 \cdot 0211 \\ g_5 = 422 \cdot 7327 \\ g_3 = 295 \cdot 5925 \\ \hline 5527 \cdot 3731 \;{}_2 \\ \hline 11054 \cdot 7462 \\ 2777 \cdot 6235 \\ \hline 8277 \cdot 1227 : 3 \\ \hline 2759 \cdot 0409 \times 6 \cdot 4 \\ \hline 16554\ 2454 \\ 1103\ 61636 \\ \hline 1 \cdot 7657\ 86176 \\ J_1 + J_2 = 0 \cdot 0345\ 1 \\ \hline J = 1 \cdot 8003\ 0\, m^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} g_{16} = 1040 \cdot 6212 \\ g_{12} = 764 \cdot 5380 \\ g_8 = 602 \cdot 6282 \\ g_4 = 369 \cdot 8361 \\ \hline 2777 \cdot 6235. \end{array}$$

55. g. **Schlussbemerkungen.** Aus den Resultaten des vorstehenden (oder auch eines andern) Beispieles einen Schluss auf den Wert der einen oder der andern Methode der Kubierung ziehen zu wollen, wäre aus dem Grunde falsch, weil ja der oder jener Schaft im grossen Ganzen zufällig denjenigen Formen sich nähern kann, von welchen bei der Aufstellung der diversen Formeln ausgegangen wurde.

Wir ersehen aber dennoch aus den vorliegenden Resultaten, dass dieselben, wenn auch nach den verschiedenen Formeln berechnet, sich um so mehr gegenseitig nähern, in je mehr Sektionen das Schaftstück geteilt wurde, weil die Fehler bei Berechnung von kurzen Schaftstücken unbedeutender werden, ein andermal sich gegenseitig ausgleichen. — Diese Differenzen werden durch Berücksichtigung des Formexponenten auf das möglichste Minimum herabgedrückt und dürfte daher unter den in voriger Nummer erhaltenen Resultaten die Zahl $1 \cdot 80312 m^3$ den vollen Anspruch darauf erheben, dass sie der Wahrheit am nächsten stehe.

Aus der Berücksichtigung der Form bei der Kubierung lässt es sich auch erklären, warum die Formexponentenmethode schon bei sechs Sektionen nahezu das richtige Resultat (Differenz $0 \cdot 00078\ m^3$) liefert, was bei einer anderen Methode (selbst bei der Sympson'schen Regel und der Formel Simony's) nur dem Zufalle zuzuschreiben wäre. —

Wird die Frage aufgeworfen, welche der vorgehend abgehandelten Methoden zur Kubierung anzuwenden sei, so kann die Antwort nur mit Hinsicht auf den Zweck der Arbeit gegeben werden.

Handelt es sich um gewöhnliche Kubierungen, wie sie etwa in der Praxis zu Verkaufszwecken vorkommen, so wird die Berechnung gewöhnlich aus nicht allzuvielen Sektionen vorgenommen und sind hierzu die Durchmesser mittelst gewöhnlicher Kluppen zu ermitteln. Auch wird man zu solchen Zwecken niemals die Formexponentenmethode oder eine andere komplizierte Messung und Berechnung anwenden.

Wenn das Stammende in eine sehr unregelmässige Querfläche ausläuft, so wählt man gern eine jener Methoden (sektionsweises Verfahren), in deren Formel erstere gar nicht vorkommt (Simony, Huber, Hossfeld). Sollen jedoch Kubierungen zu wissenschaftlichen Zwecken vorgenommen werden, also Kubierungen, deren Resultate einen hohen Grad von Genauigkeit besitzen müssen, so sind möglichst viele Sektionen zu nehmen und die Querflächen womöglich aus Ausschnitten direkt zu ermitteln. (Siehe Nr. 36 bis 41.) Die Kubierung ist zufriedenstellend, wenn bei Supponierung von n Sektionen nahezu dasselbe Resultat erhalten wird wie bei 2 n Sektionen (d. h. wenn die

Differenz dieser beiden Resultate innerhalb der erlaubten Fehlergrenze liegt).

Hier dürfte bei verhältnismässig wenig Sektionen die Formexponentenmethode befriedigende Resultate geben.

H. Einfluss der Längen- und Durchmessermessung auf den Inhalt der Stämme.

56. Die Längenmessung des Holzes beansprucht bei weitem nicht jene Sorgfalt, wie sie bei der Durchmesserbestimmung gefordert werden muss. — Es ergiebt sich dies aus folgenden Betrachtungen: Der Kubikinhalt eines Stammes wird, wie weiter oben gefunden wurde, nach der Formel $K = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} d^2 h$ ermittelt.

Nehmen wir an, dass bei der Durchmessermessung der Fehler $\pm\delta$ unterlaufen sei und die Höhe h ganz fehlerlos gemessen wurde, so ergiebt sich der Inhalt

$$K_1 = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} (d \pm \delta)^2 h.$$

Anderseits sei vorausgesetzt, dass bei einer zweiten Messung desselben Stammes das d korrekt, die Höhe aber um $\pm\Delta$ von der Wahrheit abweichend gefunden wurde; dann ist

$$K_2 = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} d^2 (h \pm \Delta).$$

Soll nun untersucht werden, wie sich Durchmesser- und Höhenfehler zu einander stellen, wenn beide gleichen Einfluss auf die Inhaltsberechnung üben sollen, so brauchen wir nur $K_1 = K_2$ zu setzen, woraus folgt

$$(d \pm \delta)^2 h = d^2 (h \pm \Delta),$$

oder

$$(d^2 \pm 2 d\delta + \delta^2) h = d^2 (h \pm \Delta).$$

Da hier δ^2 gegen die beiden anderen Glieder vernachlässigt werden kann, so folgt

$$d^2 h \pm 2 d \delta h = d^2 h \pm d^2 \Delta,$$

oder

$$\pm 2 \delta h = \pm d \Delta,$$

woraus

$$\delta = \frac{d}{2h} \Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

sich ergiebt, d. h. der Durchmesserfehler darf, wenn er dieselbe Abweichung im Kubikinhalte des Stammes hervorrufen soll wie der Höhenfehler, nur ein aliquoter Teil des letzteren sein.

Z. B. ein Stamm hätte die Höhe $h = 25$ m und einen Durchmesser $d = 0 \cdot 5$ m; die Höhe wäre um 1 m zu kurz oder zu lang gemessen, so ergäbe sich der äquivalente Durchmesserfehler $\delta = \frac{0 \cdot 5}{50} \cdot 1 = 0 \cdot 01$ m oder 1 cm.

Soll der Einfluss, welchen der Durchmesserfehler und Längenfehler allein oder beide zusammen auf den Kubikinhalt eines Stammes üben, in Prozenten des fehlerfreien Inhaltes ausgedrückt werden, so können hierfür die nötigen Formeln leicht aufgestellt werden:

α) Aufsuchung des Fehlerprozentes für den Fall, als bloss die Länge h um $\pm \varDelta$ unrichtig bestimmt wäre.

Wir fanden: $$K = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} d^2 \pi.$$

Es muss daher $K_1 = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} d^2 (h + \varDelta)$ und der Fehler u_1 des Stamminhaltes ist dann

$$u_1 = K_1 - K = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} d^2 \varDelta.$$

Weil nun das Prozent $p = \frac{u_1 \times 100}{K}$, so ergiebt sich nach erfolgter Substitution der Werte für u_1 und K

$$p = \frac{\varDelta \times 100}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 76)$$

Ist z. B. der Längenfehler $\varDelta = 1$ m und die Höhe des Stammes $h = 25$ m, so folgt für den Kubikinhalt ein Fehlerprozent von $p = \frac{100}{25} = 4\,^0/_0$.

β) Aufsuchung des Fehlerprozentes für den Fall, als bloss der Durchmesser um $\pm \delta$ unrichtig bestimmt ist. Wir erhalten unter dieser Voraussetzung:

$$K_2 = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} (d + \delta)^2 h$$

$$= \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} (d^2 + 2 d \delta h).$$ (Hier wurde δ^2 gegen die übrigen Glieder vernachlässigt.)

Es ist dann der Inhaltsfehler $u_2 = K_2 - K = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} 2 d \delta h$

und weil $p = \frac{u_2 \times 100}{K}$, so resultiert $p = \frac{2 \delta \times 100}{d} \quad \ldots \ldots \quad 77)$

Ist z. B. $\delta = 0 \cdot 01\,m$, $d = 0 \cdot 5\,m$, so ergiebt sich $p = \frac{2}{0 \cdot 5} = 4\,\%$.

γ) Aufsuchung des Fehlerprozentes für den Fall, als die Länge des Stammes um $\pm\Delta$ und der Durchmesser um $\pm\delta$ unrichtig bestimmt wären. —

Wir erhalten hier $K_8 = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} (d+\delta)^2 (h+\Delta)$,

oder wenn in der Entwickelung $\Delta\delta^2$ gegen die übrigen Glieder vernachlässigt wird,

$$K_8 = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} [d^2 h + 2 d\delta (h+\Delta) + \delta^2 h + d^2 \Delta].$$

Der Fehler u_8 im Kubikinhalte ist hier

$$u_8 = K_8 - K = \frac{1}{1+m} \frac{\pi}{4} [2 d\delta (h+\Delta) + \delta^2 h + d^2 \Delta]$$

und daher das Fehlerprozent, da auch hier $p = \frac{100 \times u_8}{K}$,

$$p = \frac{100 [2 d\delta (h+\Delta) + \delta^2 h + d^2 \Delta]}{d^2 h} \quad \text{oder}$$

$$p = 100 \left[\frac{2\delta (h+\Delta)}{dh} + \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 + \frac{\Delta}{h}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 78)$$

Ist z. B. $\delta = 0 \cdot 01\,m$, $d = 0 \cdot 5$, $\Delta = 1\,m$ und $h = 25\,m$, so resultiert ein Fehlerprozent $p = 8 \cdot 2\,\%$.

I. Mittel zur raschen Auffindung der Kubikinhalte für Zwecke der Praxis.

57. Es giebt verschiedene Mittel, um die Kubierung von Stämmen oder Stammabschnitten zu erleichtern. Es seien hier angeführt: a. die Hilfstafeln, b. der Kubierungskreis von R. Weber und c. die Kubierungskluppe.

a. **Die Hilfstafeln.** Hierzu zählt man die Kreisflächentafeln und die Kubierungstafeln (Walzentafeln). Über Kreisflächentafeln siehe Nr. 47.

Die Walzentafeln enthalten die Inhalte der Stämme oder Stammabschnitte nach der Formel γh oder $\frac{\delta^2}{4} \pi h$ berechnet und besitzen die Eingänge nach δ und h. Je nach dem Zwecke sind die Durchmesser und Längen mehr oder minder fein abgestuft in die Tafeln aufgenommen.

Die Literatur ist sehr reich an solchen Tafeln; wir führen hier an:

Blume, W., Kubiktabellen für runde Hölzer nach dem Metersystem. Düsseldorf 1869.

Pabst, G., Tafeln zur Inhaltsbestimmung runder Hölzer nach dem mittleren Durchmesser, nebst Tafeln zur kubischen Bestimmung behauener und geschnittener Hölzer im metr. Masssystem. Gera 1870.
Pleibel, A., Tabellen zur Bestimmung des kubischen Inhaltes runder und vierkantiger Stämme nach dem metr. System (kleinere und grössere Ausgabe). Stuttgart 1871.
Pressler, M. R., Forstliche Kubierungstafeln nach metrischem Mass zum Dienstgebrauch der Königl. Sächsischen Forstverwaltung. Leipzig 1871.
Thiele, W., Tafeln zur Inhaltsbestimmung der Rundhölzer nach Kubikmetern. Dessau und Ballenstedt 1871.
Schindler, K., Portefeuille für Forstwirte. Wien 1872.
Knizek, V., Die Holzmassenermittlung nach metr. Mass. Wien 1872.

b. **Der Kubierungskreis von R. Weber.** Dieser einfache und sehr verwendbare Behelf basiert auf dem Prinzipe des logarithmischen Rechenschiebers. Auf den sich berührenden Rändern der Mantelflächen zweier um eine gemeinsame Achse drehbaren Cylinder von gleichem Durchmesser sind zwei logarithmische Skalen durchgeführt. Auf der unteren Teilung sind die Numeri der betreffenden Logarithmen (soweit es die Deutlichkeit zulässt) beigesetzt, während bei der oberen Skala, welche im Prinzipe dieselbe Teilung besitzt, zu den doppelten Logarithmen der Zahlen, diese letzteren beigesetzt erscheinen (bei 2 log n steht n, also z. B. bei 2 log 25 steht 25). Diese obere Skala wird bei der Kubierung für die Durchmesser in Anspruch genommen, während die untere Einteilung die Längen der Stämme aufzunehmen hat. — Gebraucht man den Kubierungskreis für die Berechnung aus dem Mittendurchmesser und der Länge nach der Formeln $K = \frac{\pi}{4}\delta^2 h$, so ist $\log K = \log\frac{\pi}{4} + 2\log\delta + \log h$ oder $\log K = -\log\frac{4}{\pi} + 2\log\delta + \log h$. Die Grösse $-\log\frac{4}{\pi}$ ist für alle Fälle (der Kubierung) konstant und erscheint auf der oberen Skala vom Nullpunkte (Numerus 1) aus in der Richtung der fortschreitenden Bezifferung aufgetragen und ist der Endpunkt dieser Strecke als Index durch einen längeren und zugleich stärkeren Strich und überdies durch eine kleine Niete gekennzeichnet. —

Man kann die richtige Lage dieser Marke mittelst der unteren Skala kontrollieren, da nach dieser der Index vom Punkte 1 die Entfernung $\log\frac{4}{\pi} = \log 1{\cdot}273$ besitzen muss, nämlich dann, wenn die Punkte 1 der beiden Skalen zur Coincidenz gebracht sind. —

Der Gebrauch dieses Behelfes ist sehr einfach. Man stellt den

erwähnten Index auf jenen Numerus der unteren Skala ein, welcher der Länge des zu kubierenden Stückes gleichkommt, und liest auf derselben Skala den Kubikinhalt dort ab, wo sich an der oberen Skala der Numerus des gemessenen Mittendurchmessers ergiebt. Zum besseren Verständnis siehe Nr. 10.

Wie man sieht, bieten die Teilungen des Kubierungskreises nichts Neues; allein Weber's Verdienst, den logarithmischen Rechenschieber kompendiös und bequem und, insofern derselbe aus Messing hergestellt ist, auch im Freien unter allen Witterungsverhältnissen verwendbar gemacht zu haben, kann auf volle Anerkennung Anspruch erheben.

Weber benutzt den Kubierungskreis auch zur Inhaltsberechnung stehender Stämme, worauf jedoch näher einzugehen hier nicht der richtige Ort wäre.[1])

c. **Die Kubierungskluppe** giebt die nach der Formel $K = \frac{\delta^2 \pi}{4} h$ berechneten Inhalte von Stämmen und Stammabschnitten an, gerade sowie die üblichen Kubierungstafeln. Diese Kluppe kann als solche irgend eine der bekannten Konstruktionen (siehe Nr. 14—22) erhalten. Ihr Massstab ist an der schmalen Kante in Zentimeter geteilt und sind von diesen Teilstrichen über die ganze breite Seite des Massstabes, senkrecht zur Längsrichtung des letzteren, Striche gezogen. Ferner ist dieselbe Seite des Massstabes der Länge nach durch Gerade in zehn gleich breite Streifen abgeteilt. Auf der Innenseite ist der bewegliche Arm im Gebiete der Massstabbreite in zehn gleiche Teile geteilt, die mit den Längsstreifen des Massstabes korrespondieren und die Längen 2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m, 7 m, 8 m, 9 m, 10 m, 11 m eingezeichnet enthalten. In den durch die vorerwähnten Linien auf der Breitseite des Massstabes entstandenen Rechtecken sind übereinstimmend mit den Längen und den auf der Schmalseite eingezeichneten Durchmessern (in cm) die Kubikinhalte in Festmetern angegeben. Die Rückseite des Massstabes ist in ähnlicher Weise geteilt und beschrieben, nur sind hier die Längen aufsteigend von 12 m eingezeichnet. Die Anwendung dieser Kluppe ist für sich klar. Sollten für gewisse lokale Verhältnisse andere Längen zu berücksichtigen sein, so muss hierauf bei der Ausfertigung der Kluppe entsprechend Bedacht genommen werden.

---

[1]) Zu haben ist dieser Kubierungskreis nebst autographierter Broschüre zur Anleitung desselben bei Julius Springer, Verlagsbuchhandlung, Berlin.

2. Von den physikalischen Methoden der Kubierung.

58. Unregelmässige Holzstücke, wie sie etwa im erzeugten Stockholze, oder in Form von ästigen, krummen Knüppeln, oder als Reisholz vorkommen, werden auf ihre Volumina im physikalischen Wege geprüft.

Man unterscheidet hier die Volumsermittelung durch Aichung allein, durch Aichung verbunden mit der Wägung und durch das hydrostatische Verfahren.

59. **a. Volumsermittelung durch Aichung.** Durch diese werden unstreitig die verlässlichsten Resultate erhalten. Man bedient sich hierzu des sogenannten Aichgefässes oder Xylometers. Diese Gefässe sind aus diversen Materialien (Holz, Blech, Glas) und in verschiedenen Formen hergestellt worden; wir wollen uns hier jedoch auf die Beschreibung der gegenwärtig anerkannt besten derartigen Einrichtung, nämlich des Ganghofer'schen Xylometers, beschränken. Abbildung Fig. 29 und Schilderung dieses Apparates sind dem „Forstlichen Versuchswesen“ von A. Ganghofer, 1881, Seite 85, entnommen.

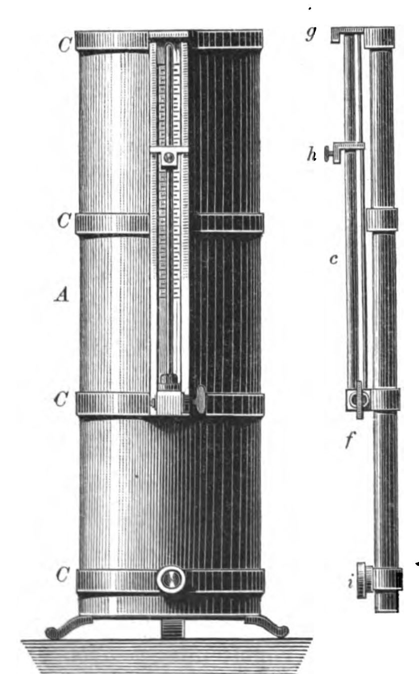


Fig. 29.

Das cylindrische Gefäss *A* ist aus starkem Eisen- oder Zinkblech hergestellt; es trägt 4 Verstärkungsringe *C* und besitzt solide Füsse. — Das Glasrohr *c* ist an seinem unteren Ende mit dem Gefässe in kommunizierende Verbindung gebracht, während das obere Ende des ersteren in einen entsprechend angebrachten Ring leicht einpasst. Die Kommunikation zwischen Glasrohr und Gefäss kann jedoch durch den bei *f* angebrachten Hahn gesperrt und hergestellt werden.

An dem Cylinder, unmittelbar hinter dem erwähnten Glasrohr, ist die Skala *e* aufgeschraubt. Diese trägt eine Teilung, deren Grundstriche durch das vorsichtige, wiederholte Einbringen von je 5 Liter Wasser erhalten wurden, indem vorher soviel Wasser in das

Aichgefäss kam, bis das Niveau desselben nahe am unteren Ende des Glasrohres (jedoch schon in diesem) erschien, wodurch sich gleichzeitig der Nullpunkt der Skala ergab.

Die durch diese Aichung erhaltenen Intervalle an der Skala sind weiter in je 10 gleiche Teile unterabgeteilt, so dass die Ablesung genau bis auf halbe Liter, schätzungsweise auf $^1/_5$ halbe Liter oder $^1/_{10}$ Liter vorgenommen werden kann.

Zum Schutze des Glasrohres sind beiderseits parallel zu diesem Eisenlamellen und oben eine Schutzkappe *g* angebracht. Längs der Lamellen lässt sich eine Absehvorrichtung *h* verschieben, wodurch eine genaue Einstellung, also auch eine genaue Ablesung am Wasserniveau des Glasrohres ermöglicht ist. — Die durch den Hahn bei *f* absperrbare Öffnung ist mit einem feinen Seiher versehen, um den Schmutz, der in grösserer oder geringerer Menge mit dem zu aichenden Holze in das Aichgefäss gelangt, zurückzuhalten. Am Boden des Gefässes ist behufs Reinigung und gänzlicher Entleerung eine grössere, mit aufschraubbarer Kapsel verschliessbare Öffnung *i* angebracht. —

Dieses Aichgefäss bekommt für gewöhnliche Aichungen einen lichten Durchmesser von ca. 0·5 m und eine Höhe von 1·6 m. — —

Die Aichung selbst wird zweckmässig in folgender Weise vorzunehmen sein:

Mit Rücksicht auf die in das Aichgefäss einzubringende Holzquantität darf der Wasserstand im Xylometer weder zu hoch, noch zu niedrig genommen werden. Das Niveau wird mit Hilfe des Schiebers *h* genau abgelesen und notiert. Hierauf wird bei vollkommen ruhigem Wasserstand der Hahn bei *f* abgesperrt und das zu aichende Holz in den Xylometer gebracht. Je mehr davon in das Gefäss gegeben wird, desto genauer wird die Bestimmung, weil sich der Beobachtungsfehler auf eine grössere Quantität verteilt. Um jedoch das Holzvolumen richtig zu erhalten, muss das zu aichende Holz unter den Wasserspiegel gehalten werden, was durch Anwendung von Draht, Stäben oder einer Eisenplatte oder im Notfalle auch mit der Hand geschehen kann. Selbstverständlich sind aber diese Mittel, soweit sie in das Wasser getaucht werden, durch das Aichgefäss, am besten vor der Holzaichung, auf ihre Volumina zu prüfen, und sind letztere bei der Volumsbestimmung des Holzes zu berücksichtigen. —

Ist das sämtliche, auf einmal zu prüfende Holzquantum eingebracht und unter Wasser gehalten, so wird der Hahn bei *f*, um das Zerspringen des kommunizierenden Glasrohres zu verhüten, behutsam geöffnet, nach Beruhigung der Wasserspiegels (im Gefäss und

Rohr) unter Zuhilfenahme des Absehens h am Niveau des Glasrohres die Ablesung gemacht und der Hahn bei f geschlossen. Die letzte Ablesung wird ebenfalls notiert. — Betrug diese V, die Ablesung vor dem Einbringen des Holzes aber v, so ist der Kubikinhalt K des geaichten Holzes $K = (V - v)\, dm^3$, welche Grösse noch um k zu korrigieren ist, jenes k nämlich, welches dem Volumen der Mittel zum Niederhalten des Holzes im Aichgefässe entspricht. Hat sich bei deren Eintauchen der Wasserspiegel von v auf $\mathfrak{V}$ gehoben, so ist offenbar $k = (\mathfrak{V} - v)\, dm^3$, daher der verbesserte Kubikinhalt des Holzes $\mathfrak{K} = K - k = (V - \mathfrak{V})\, dm^3$.

Entspricht das Aichgefäss seiner ganzen Höhe nach der Form eines Cylinders (oder Prismas), sind daher die Skalenteile an demselben untereinander gleich, wie dies bei den neueren Aichgefässen durchwegs der Fall ist, so erscheint jede Vertikalstellung des Gefässes beim Gebrauche desselben, wie schon in Langenbacher's Forstmathematik (1875) nachgewiesen wurde, überflüssig. Wir fanden seit dieser Zeit Hinweise auf diesen Umstand in mehreren Schriften — natürlich ohne Quellenangabe. Wir wiederholen an dieser Stelle den citierten Beweis:

Ist g die Grundfläche des Aichgefässes und h die Höhe des verdrängten Wassercylinders im horizontal (vertikal) gestellten Aichgefässe, so ist der Inhalt des untersuchten Stückes $k = gh \ldots\ldots$ I. Ist ferner G die Grundfläche des verdrängten Wassercylinders im schiefstehenden Gefässe und η (Fig. 30) die Höhe des ersteren, so muss auch für denselben Körper $k = G\eta$. Weil aber $g = G \cos\alpha$, worin α der Neigungswinkel der Grundfläche ist, so folgt $G = \frac{g}{\cos\alpha}$. Aus der Fig. 30 ergiebt sich ferner $\eta = S \cos\alpha$, und werden diese letzteren Werte in $k = G\eta$ substituiert, so resultiert $k = \frac{g}{\cos\alpha} \cdot S \cos\alpha = gS \ldots$ II.

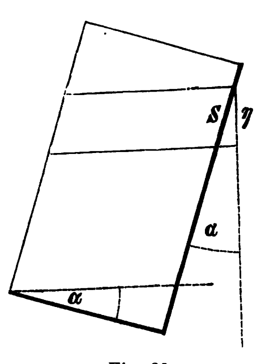


Fig. 30.

In beiden Fällen (I und II) geben daher h und S an der Skala unmittelbar die gleichen Inhalte k an.

Als Aichgefäss kann im Notfalle irgend ein grösseres Gefäss (Tonne, Fass etc.) benützt werden, wenn nahe am oberen Rande desselben ein Abflussrohr angebracht und ersteres bis an die Ausflussöffnung mit Wasser gefüllt wird. Fängt man das beim Eintauchen des zu aichenden Körpers verdrängte und daher hier abfliessende Wasser auf und misst letzteres mit Gefässen von bekanntem Inhalte (Doppelliter, Liter etc.), so erhält man auf ganz einfache Art den Kubikinhalt des untersuchten Stückes. —

Zur Aichung kleinerer Holzstücke kann man sich graduierter Glascylinder bedienen. Solche kommen als „Standcylinder“ für Zwecke

der Chemie in den verschiedensten Dimensionen und Teilungen in den Handel. —

60. b. **Kubierung durch Aichung und Wägung.** Da das Aichverfahren, allein auf grössere Holzquantitäten angewendet, allzuviel Zeit in Anspruch nimmt, anderseits aber für viele Zwecke ein so hoher Genauigkeitsgrad, wie ihn die Aichung allein bietet, nicht prätendiert wird, so begnügt man sich einfach mit einer Aichprobe und schliesst hieraus auf das Volumen der übrigen Masse. —

Zu diesem Zwecke sortiert man das zu kubierende Holz und nimmt aus jedem Sortimente je eine derartige Probe heraus, dass dieselbe in Richtung auf Form, Stärke etc. das betreffende Sortiment zu repräsentieren vermag und auf einmal geaicht werden kann. Vor der Aichung wird diese Probe (am besten mit der sogenannten Schnellwage) gewogen und hierauf erst in das Xylometer gebracht. Ist der Kubikinhalt dieser Probe (mit dem Aichgefässe ermittelt) k und wurde das absolute Gewicht derselben mit g bestimmt, setzen wir ferner voraus, dass K den Inhalt des ganzen betreffenden Sortimentes bedeutet und das ebenfalls auf der Schnellwage gefundene Gewicht des letzteren G sei, so muss, wenn die Probe richtig ausgewählt wurde, d. h. wenn die mittlere Dichte des Probeholzes der mittleren Dichte des ganzen Sortimentes gleichkommt, die Proportion $K:k = G:g$ bestehen, woraus erhalten wird:

$$K = \frac{k}{g} G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 79)$$

61. c. **Das hydrostatische Verfahren.** Diese Art der Volumsbestimmung gründet sich auf das bekannte Archimedische Prinzip: „Ein in Wasser getauchter Körper verliert scheinbar an seinem absoluten Gewichte soviel, als das von ihm verdrängte Wasser wiegt."

Wird, wie nachstehende Skizze zeigt, zunächst das absolute Gewicht G einer Holzquantität (hier einer Reisigwelle x) mittelst der Schnellwage bestimmt und hierauf das Gewicht g ermittelt, welches die Welle, unter Wasser getaucht, noch aufzuweisen vermag, so ist offenbar das Gewicht des vom Holze verdrängten Wassers $\gamma = G - g$. Sind G und g in Kilogrammen (Kg) ausgedrückt, so erhält man γ in Kg. Das γ als Volumen (in Litern) entspricht aber nur bei 4^0 C. genau derselben Zahl (γ) in Kilogrammen; es ist sonach bei sehr genauen Arbeiten auch auf die Temperatur des zu diesen Versuchen verwendeten Wassers Rücksicht zu nehmen. — Entspricht bei der Temperatur t^0 C. einem Liter Wasser das Gewicht $\mathfrak{g}$, und hatten wir bei dieser Temperatur gewogen, so muss offenbar $\gamma : \gamma_1 = \mathfrak{g} : 1$,

wenn γ_1 die dem γ entsprechende Zahl in Kilogrammen, reduziert auf die Temperatur von 4° C., vorstellt. Aus dieser Proportion erhält man $\gamma_1 = \frac{\gamma}{g}$ oder $\gamma^1 = \frac{G - g}{g}$. Man könnte hier das g für die mittlere Temperatur von ca. 16° C. mit 0·999 in Rechnung bringen, bei wissenschaftlichen Versuchen wird es jedoch angezeigt

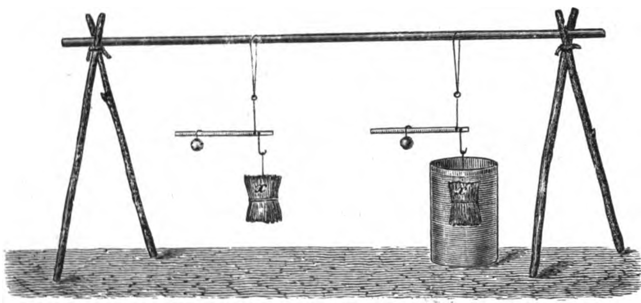


Fig. 31.

sein, die jedesmalige Temperatur des zu verwendenden Wassers mittelst eines hierzu geeigneten Thermometers zu erheben und die entsprechende Dichte (Gewicht der Volumseinheit = 1 Liter) in die Rechnung einzuführen. Zu diesem Zwecke ist hier das Täfelchen, entnommen dem vortrefflichen Lehrbuche der Physik und Meteorologie von Müller-Pfaundler (1879), beigegeben.

Dichte des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.

Temp. °C.	Dichte	Temp. °C.	Dichte
0	0·999871	15	0·999160
1	9928	16	9002
2	9969	17	8841
3	9991	18	8654
4	1·000000	19	8460
5	0·999990	20	0·998259
6	9970	21	8047
7	9933	22	7828
8	9886	23	7601
9	9824	24	7367
10	0·999747	25	7120
11	9655	26	6866
12	9549	27	6603
13	9430	28	6331
14	9299	29	6051

Beispiel. Eine Reisigwelle, in der Luft gewogen, besässe das Gewicht $G = 7 \cdot 6$ kg. Völlig in das Wasser getaucht verliert die Welle scheinbar nicht nur ihr ganzes Gewicht, es kommt ihr vielmehr infolge ihres Bestrebens, nach aufwärts, theilweise über den Wasserspiegel, zu gelangen, ein negatives Gewicht zu. Setzen wir dieses für unser Beispiel $g = -0 \cdot 5$ kg, so wäre $\gamma = 7 \cdot 6 + 0 \cdot 5 = 8 \cdot 1$ kg $= 8 \cdot 1$ dcm^3. Soll die gefundene Temperatur (16^0) des hierbei benutzten Wassers ebenfalls berücksichtigt werden, so ist $\gamma_1 = 8 \cdot 108$ kg $= 8 \cdot 108$ dcm^3.

Das g unmittelbar zu bestimmen, wäre nicht unmöglich, jedoch mit Schwierigkeiten verknüpft, weshalb man vorzieht, einen Hilfskörper zu verwenden, durch dessen grössere Dichte die Welle unter Wasser gehalten wird. Zu diesem Zwecke verwendet man Metallcylinder oder im Notfalle entsprechend grosse und schwere Steine. —

Der verwendete Hilfskörper wird dann ebenfalls für sich, sowohl auf sein absolutes Gewicht, als auch auf den scheinbaren Gewichtsverlust im Wasser, geprüft.

Beträgt das absolute Gewicht der zu untersuchenden Holzprobe samt dem an dasselbe befestigten Hilfskörper G und ergiebt dasselbe Holzquantum mit dem Hilfskörper im Wasser gewogen das Gewicht g, so ist nach dem Obigen $\gamma = G - g$ der Gewichtsverlust, den das Holz samt dem Hilfskörper im Wasser scheinbar erleidet. Soll behufs genauer Ermittlung auch die Wassertemperatur berücksichtigt werden, so führt nach obiger Darstellung die Formel $\gamma_1 = \frac{G - g}{\mathfrak{g}}$ zum Ziele. Beträgt das Gewicht des Hilfskörpers in der Luft bestimmt S kg und im Wasser gewogen s kg, so ist $\alpha = \frac{S - s}{\mathfrak{g}}$ der scheinbare Gewichtsverlust desselben und folglich der Gewichtsverlust v des Holzes allein $v = \gamma_1 - \alpha$; v ist also das Gewicht des vom Holze verdrängten Wassers in kg, oder das Volumen in Litern oder Kubikdezimetern. Es ist klar, dass das absolute Gewicht $\mathfrak{G}$ aus G und S durch einfache Subtraktion dieser letzteren Grössen erhalten werden kann, dass also $\mathfrak{G} = G - S$ und dass daher die Wägung des Holzes allein (in der Luft) unnötig ist.[1]) Das absolute Gewicht $\mathfrak{G}$ der Holzprobe ist aber nur für den Fall zu bestimmen, wenn es sich um die Ermittlung des Holzvolumens pro Gewichtseinheit handelt.

---

[1]) Wird jedoch das Holz allein und dann das Holz mit dem Hilfskörper gewogen, so erscheint wieder die Wägung des Hilfskörpers unnötig, da $S = G - \mathfrak{G}$.

Entspricht nämlich dem gefundenen Holzvolumen v das Gewicht $\mathfrak{G}$ kg, so ist $\mathfrak{V} = \frac{v}{\mathfrak{G}}$ das Volumen für 1 kg des untersuchten Holzes, oder soll das Volumen in Kubikmetern (Festmetern) ausgedrückt werden, $\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{V}}{1000} = \frac{v}{1000\,\mathfrak{G}}$, d. i. das Volumen eines Kilogramm Holzes in m³ (Festmetern) ausgedrückt.

Beispiel. Eine Holzprobe samt dem daran befestigten Hilfskörper hat in der Luft ein Gewicht $G = 12 \cdot 5$ kg. Das Ganze, ins Wasser getaucht, wiegt $2 \cdot 8$ kg ($= g$). Bleibt die Temperatur des Wassers unberücksichtigt, so ist $\gamma = 12 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = 9 \cdot 7$ kg.

Der Hilfskörper, in der Luft gewogen, hat $S = 4 \cdot 3$ kg, im Wasser gewogen, $3 \cdot 5$ kg, daher ist $\alpha = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = 0 \cdot 8$ kg, sonach das Volumen der Holzprobe $v = 9 \cdot 7 - 0 \cdot 8 = 8 \cdot 9$ dcm³. Die Holzprobe hat das Gewicht $\mathfrak{G} = 12 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 8 \cdot 2$ kg und ist daher das Volumen pro Kilogramm der Probe $\mathfrak{V} = 8 \cdot 9 : 8 \cdot 2 = 1 \cdot 08$ dcm³ oder $\mathfrak{v} = 0 \cdot 00108$ m³.

Für eine ganze Reihe von derartigen Versuchen ist, wie sich aus dem Vorhergehenden von selbst ergiebt, die Anwendung desselben Hilfskörpers von Vorteil. Selten wird man sich entschliessen, grosse Massen von Holz in dieser Weise zu kubieren, man wird sich in der Regel mit der sorgfältigen Sortierung des Holzes und der hydrostatischen Wägung einer oder mehrerer Proben jedes Sortimentes begnügen und hierfür den Reduktionsfaktor $\mathfrak{v}$ bestimmen. Wird dann das absolute Gewicht Pkg jedes Sortimentes bestimmt, so erhält man für viele Fälle genau genng die Holzmasse M der einzelnen Sortimente nach der einfachen Formel $M = P . \mathfrak{v}$. in Kubikmetern. —

Anmerkung. Nach Ganghofer eignet sich zur hydrostatischen Wägung am besten die Schnellwage (durch Versuche von Oberförster Wessenschneid nachgewiesen). Müttrich verwendet hiezu die Dezimalwage (Brückenwage), die nicht nur schwer zu transportieren, sondern auch mühsam aufzustellen ist. Gewiss würde sich auch eine gut konstruierte Federwage zu derartigen Versuchen empfehlen. Schnellwage oder auch die Federwage können im Walde auf einen in passender Höhe gewählten, hinreichend starken Ast gehängt werden, oder es wird zu diesem Zwecke ein Bock aus Stangen hergestellt, wie Fig. 31 es andeutet, oder es werden drei eine Pyramide bildende Stangen oben zusammengebunden und zum Aufhängen der Wage benutzt. — Bei Probekubierungen dieser Art ist es oft zweckdienlich, das Probeholz nach Hause zu schaffen und daselbst die Arbeit vorzunehmen.

3. Festgehalt der Schichtmasse.

62. Schichtmasse können Nutzholz und Brennholz enthalten. Jedes dieser beiden Sortimente, welche bei der Bestimmung ihres soliden Massengehaltes gleiche Behandlung finden, zerfällt in Scheitholz, Knüppelholz und Reisig. Die beiden letzteren Sortimente werden im runden Zustande geschichtet, und man begreift unter Reisig alles Rundholz bis zu 7 cm (unterer) Stärke, während der obere Durchmesser der Knüppel innerhalb der Grenzen 7 cm — 14 cm sich bewegt. Über 14 cm starke Stämme oder Astteile werden behufs Erzeugung von Scheitholz in Stücke (Scheite, Klieben) aufgespalten, deren Querschnitt sich mehr oder minder einem Kreisausschnitte nähert, wenn nicht bei stärkeren Stücken das Kernholz — wie dies in manchen Forsthaushaltungen geschieht — besonders herausgespalten wird. —

Das Scheit- und Knüppelholz bekommt gewöhnlich eine Länge von 1 m und wird in parallelepipedischer Form zwischen Stützen in Stössen von 1 m Höhe und ein oder mehreren Metern Länge aufgeschichtet, so dass dieselben ein oder mehrere Würfel von je 1 m Kantenlänge vorstellen. Jeder solche Würfel heisst ein Raummeter. Zuweilen weicht die Scheitlänge von 1 m ab, häufig beträgt sie 0·8 m; dann wird der Raummeter in Form eines Parallelepipedons von 1 m Breite und 1·25 m Höhe aufgestellt; sein Inhalt beträgt auch dann $0{\cdot}8 \times 1 \times 1{\cdot}25 = 1{\cdot}m^3$.

Auf Berglehnen muss entweder die Breite (1 m) des Meterstosses horizontal oder die Höhe desselben senkrecht zur Basis des Stosses gemessen werden.

Reisig wird entweder auch in derselben Weise wie Scheit- und Knüppelholz geschichtet oder zu je 100 Bünden (Wellen) mit 1 m Länge und 1 m Umfang in Rechnung gebracht. Auch Stockholz und Rinde werden zuweilen in Schichtmasse eingelegt.

Es ist von grossem Werte, zu wissen, wie viel an solider Holzmasse in den Verkaufsmassen der verschiedenen Sortimente enthalten ist. — Die Beantwortung dieser Frage ist nicht einfach, da auf den Derbholzgehalt (Festgehalt) der Schichtmasse vielerlei Faktoren einwirken, wovon die massgebenden hier berührt werden sollen.

Die Erfahrung lehrt, dass die Zahl der Scheite oder Knüppel von grösserem oder geringerem Einflusse auf den Festgehalt des Schichtmasses ist und dass letzterer um so grösser wird, je weniger Scheite im Raummeter Platz finden. Gerade und glatte Scheite oder Knüppel werden unter sonst gleichen Umständen im Schichtmasse

einen grösseren Derbgehalt nachweisen lassen, als gekrümmte und ästige Hölzer. Gewandte Hände werden aus demselben Holzmateriale einen massenreicheren Raummeter aufrichten, als ungeschickte und ungeübte. Wo Schichtmasse auf eine Höhe von 2 m (resp. 2·5 m) aufgestellt werden, dort wird die obere Partie, der schwierigeren Schichtung wegen, in der Regel weniger Festgehalt besitzen. Die Art der Stützung der Schichtmasse übt ebenfalls Einfluss auf den Festgehalt der Stösse und ebenso der Umstand, ob der Derbholzgehalt gleich nach der Aufstellung des Holzes (resp. zu gleicher Zeit) oder ob derselbe erst dann erhoben wurde, nachdem das Holz schon einen gewissen Grad der Trocknung und infolgedessen ein gewisses Mass des Schwundes erfahren hat[1]); auch nimmt der Festgehalt der Schichtmasse bei sonst gleichem Materiale mit der Abnahme der Scheitlänge zu.

Es wurden namentlich von den verschiedenen Versuchsstationen viele Versuche über den Festgehalt des Raummeters angestellt; trotzdem muss man mit der Anwendung der gewonnenen Durchschnittszahlen, wie obige Bemerkungen lehren, sehr vorsichtig sein; sicherere Resultate wird hiermit nur derjenige erreichen, der sich mit derartigen Versuchen selbst befasst und sich hierdurch jenen praktischen Blick angeeignet hat, wie er zur erfolgreichen Benutzung von Erfahrungszahlen überhaupt notwendig ist.

Um einen Einblick in derartige Resultate zu bieten, sei hier ein Auszug aus Tab. I der „Mitteilungen aus dem forstl. Versuchswesen Österreichs“, herausgegeben von Dr. A. Freiherr v. Seckendorff, umfassend die gefundenen Mittelwerte des Derbholzgehaltes von je einem Raummeter der wichtigsten Holzarten, mitgeteilt.

---

[1]) Aus diesem Grunde wird vielfach noch heutzutage in Österreich ein gewisses Übermass (6, 8—10 cm) als sogenanntes Darrscheit dem Raummeter aufgesetzt, in anderen Ländern ist diese Sitte als Unzukömmlichkeit gänzlich abgeschafft worden.

Derbgehaltstafel.

Zusammenstellung der auf xylometrischem Wege gewonnenen Resultate über den Festgehalt der Raummasse.
Scheitlänge resp. Stosstiefe = 1 m.

Holzart	Derbholz										Nicht-Derbholz			
	Schichtnutzholz		Brenn- oder Feuerholz											
	Nutz-Scheitholz		Scheitholz: I. Klasse		Scheitholz: II. Klasse (Ausschuss)		Scheitholz: III. Klasse (Knorren, Rumpen)		Knüppel (Prügel)		Reisig (schwache Prügel)		Stockholz	Gebundholz*)
	Scheiterzahl	Derbgehalt in Fm	Scheiterzahl	Derbgehalt in Fm	Scheiterzahl	Derbgehalt in Fm	Scheiterzahl	Derbgehalt in Fm	Knüppelzahl	Derbgehalt in Fm	Prügelzahl	Derbgehalt in Fm	Derbgehalt in Fm	Derbgehalt in Fm
	per Raummeter ohne Stossüberhöhe (Darr- oder Schwindscheit) — Mittelwerte													per 100 Stück Wellen
Laubholz														
Rotbuche	43	0·755	49	0·680	57	0·650	33	0·589	76	0·573	207	0·447	0·393	1·503
Weissbuche	31	0·713	37	0·653	58	0·604	29	0·579	87	0·589	207	0·434	0·407	1·808
Stieleiche	37	0·724	39	0·670	51	0·576	31	0·572	73	0·560	205	0·393	0·419	1·468
Roterle	32	0·721	40	0·673	53	0·617	.	.	68	0·561	254	0·406	0·457	1·669
Weissbirke	40	0·712	45	0·647	62	0·598	.	.	82	0·591	247	0·480	0·484	1·754
Aspe	33	0·768	38	0·684	60	0·622	.	.	79	0·604	256	0·403	0·488	1·778
Nadelholz														
Fichte	34	0·781	42	0·698	53	0·677	.	.	94	0·734	306	0·636	0·517	1·582
Weisstanne	34	0·761	39	0·679	53	0·659	.	.	95	0·647	243	0·484	0·442	1·567
Lärche	28	0·768	36	0·690	66	0·665	.	.	93	0·693	256	0·596	0·588	2·463
Weisskiefer	30	0·800	37	0·681	47	0·646	.	.	66	0·648	216	0·423	0·460	1·442
Schwarzkiefer, gekloben	25	0·781	29	0·728	44	0·701	.	.	77	0·725	240	0·614	0·543	1·509
Schwarzkiefer, ungekloben	12	0·818	15	0·771	28	0·758	.	.						
	3**)		6		3									
Hartes Holz														
Rotbuche, Weissbuche, Stieleiche	38	0·731	43	0·670	59	0·628	34	0·581	84	0·573	207	0·439	0·399	1·613
Weiches Holz														
Roterle, Weissbirke, Aspe, Fichte, Tanne, Lärche, Weiss- und Schwarzkiefer	32	0·765	39	0·683	55	0·646	.	.	84	0·637	251	0·502	0·470	1·648

*) Das Gebundholz (Reisholzwellen) hat 1 m Länge und 1 m Umfang. 100 Gebunde in das Raummass eingesetzt, ergaben im Durchschnitt 8 Raumkubikmeter.
**) Anzahl der Spaltscheite, die zum Auslegen der Zwischenräume verwendet wurden.

Diese Resultate wurden alle im Wege des Aichens gefunden. Bei geradem und glattem, noch ungespaltenem (ungeklobenem), jedoch schon auf die Stosstiefe (Scheitlänge) zugeschnittenem Holze kann die Kubierung auch stereometrisch mittelst des Gabelmasses (Kluppe) aus dem Mittendurchmesser erfolgen. Die kubierten Stücke werden dann, wenn überhaupt Scheitholz daraus bereitet werden soll, aufgespalten und ins Schichtmass eingelegt.

Soll Reisig genau kubiert werden, so kann dies nur mit Hilfe des Aichgefässes oder nach der hydrostatischen Methode geschehen.

Die sogenannte indirekte Methode der Bestimmung des Festgehaltes von Schichtmassen basirt darauf, die Zwischenräume des Holzes durch Einfüllung von Wasser, Sand, Samen oder ähnlichen Materialien zu bestimmen. Diese Methode verbürgt nicht für alle Fälle zuverlässige Resultate und ist auch ihrer Umständlichkeit wegen kaum zu empfehlen. —

Die auf dem oder jenem Wege gefundenen Bruchteile eines Festmeters, welche die Derbholzgehalte des Raummeters angeben, sind selbstverständlich als Reduktionszahlen aufzufassen und zu verwenden. Wenn z. B. der Derbholzgehalt von 145 Raummeter Eichenholz und zwar Brennholz II. Klasse zu berechnen wäre, so hätte man mit Zuhilfenahme obiger Tabelle

$$145 \times 0{\cdot}677 = 98 \cdot 165\,m^3 \text{ (Festmeter).}$$

4. Erhebung der Rindenmasse.

63. Die Rinde mancher Holzarten (Tanne) wird zuweilen als Brennmaterial verwertet und für diesen Zweck gewöhnlich in Schichtmassen verkauft.

Fichten- und in Eichenschälwaldungen erzeugte Rinde findet als Gerbmaterial besondere Verwendung und wird erstere in Festmetern oder auch nach neuerem Vorschlage (Ganghofer, Forstl. Versuchswesen) der Fläche nach, letztere, meist in Normalwellen gebunden, ihrem Gewichte nach, in waldtrockenem Zustande an die Gerber abgegeben. —

Handelt es sich um Brennrinde, so kann der Derbholzgehalt ihrer Schichtmasse durch Aichung und Wägung, wie in Nr. 60 geschildert, ermittelt werden, oder es kann das bereits in Schichtmasse eingelegte Brennholz geschält und zwischen die stehengebliebenen Stützen wieder aufgeklaftert werden. Der Entgang giebt die Rindenmasse in Raummetern (des Holzes) und können diese mit dem passenden Reduktions-

faktor in Festmeter überführt werden. Hieraus berechnet sich dann leicht der Derbgehalt der aus der ganzen Masse aufgestellten Rindenschichtmasse. — Genauere Resultate werden jedoch erhalten, wenn das Holz im runden Zustande berindet und geschält aus den Mittendurchmessern kubiert wird, denn die Differenz der erhaltenen Inhalte stellt die Rindenmasse vor. Werden hierauf aus der so gemessenen Rinde Schichtmasse aufgestellt, so ist ihr Festgehalt leicht zu bestimmen. Hätte man z. B. aus der Rindenmasse, deren Festgehalt n m^3 ist, r Raummeter aufgestellt, so wäre der Derbgehalt eines Raummeters Rinde $\frac{n}{r}$ m^3. —

Die von sehr verschieden starken Stämmen gewonnene Rinde in Prozenten der hierzu verwendeten berindeten Holzmasse auszudrücken, um dann dieses Prozent anderweitig zur Erhebung der Rindenmassen zu verwerten, wäre nicht ratsam, da verschieden starke Stämme ein verschieden grosses Rindenprozent besitzen.

Denken wir uns zwei in ihren Höhen übereinstimmende Stämme von rein konischer Form, wovon der eine doppelt so stark ist als der andere, so sind die Inhalte derselben:

$K_1 = \frac{d^2}{12} \pi h$ und $K_2 = \frac{4 d^2}{12} \pi h$ und findet daher die Proportion statt:

$K_1 : K_2 = 1 : 4$. — Die Mantelflächen dieser beiden Stämme sind $M_1 = d \pi h$ und

$M_2 = 2 d \pi h$*); setzen wir die Rindendicke für beide Fälle $= \delta$, so erhalten wir die Rindenmassen: $R_1 = d \pi h \delta$ und $R_2 = 2 d \pi h \delta$ und daher ihr Verhältnis:

$$R_1 : R_2 = 1 : 2.$$

Während also die Holzmasse im quadratischen Verhältnisse des Durchmessers sich steigert, nehmen die Rindenmassen im einfachen Verhältnisse der Durchmesser zu. Besässe daher der erste Stamm 8 % seiner Gesamtmasse an Rinde, so entsprächen dem stärkeren Stamm bloss 4 % an Rindenmasse.

Man könnte allerdings dem Gesagten die Thatsache entgegenstellen, dass unter sonst gleichen Umständen die Rinde stärkerer (älterer) Stämme eine grössere Dicke besitze; allein Untersuchungen haben gelehrt, dass die Rindendicke mit dem Alter nicht in dem Ver-

*) h kann hier auch als Seite des Kegels gelten.

hältnisse wächst, wie es nötig wäre, um das Rindenprozent älterer Stämme dem der jüngeren gleichzustellen. Auch können ganz verschieden starke Stämme derselben Holzart gleiche Rindenstärke besitzen, weil letztere von vielen Faktoren, als: Standort, Schluss etc., abhängig ist. —

Die Eichenrinde, welche meist nach dem Gewicht bezahlt wird, kann auf ihr Volumen durch das Aichen geprüft werden. Gewöhnlich wird die Eichenrinde, nachdem sie waldtrocken geworden, in Normalwellen gebunden. Um den Holzmassenentgang (beim Schälen) im Schichtmasse zu konstatieren, werden die Eichenrundlinge vor dem Schälen aufgeklaftert, hierauf geschält und abermals in das Schichtmass eingelegt; der Entgang ist leicht zu bemessen und wohl auch ins Derbmass (siehe oben) umzurechnen. Letzteres bekommt man jedoch genauer durch Wägung der ganzen gewonnenen Rindenmasse und durch Wägung und Aichung einer Probe derselben. — Hat die Probe das Gewicht g und das Volumen v, so ist $\frac{v}{g}$ das Volumen der Gewichtseinheit, und hat man für die ganze Rindenmasse das Gewicht G gefunden, so ist der Derbgehalt V der fraglichen Rinde

$$V = G \frac{v}{g}.$$

5. Besondere stereometrische Kubierungsverfahren.

A. Kubierung des Klotzholzes aus Länge und Oberstärke.

64. Nachdem in den meisten Nadelholzrevieren der grösste Teil des jährlichen Einschlages zu Klotzholz ausgeformt wird, welches behufs leichterer Überwachung und rascher Schlagräumung zu Rollen vereinigt zu werden pflegt, was das Abgreifen der Mittenstärken unmöglich macht, so erscheint es wünschenswert, die Kubierung der Bloche auch aus Länge und der stets leicht zugänglichen Oberstärke bewirken zu können. Hierzu dienen die „Massentafeln für Klötze (Bloche) nach Längen und Oberstärken“, welche die durchschnittlichen Masseninhalte je eines Klotzes getrennt nach den gebräuchlichen Längen und vorkommenden Oberstärken enthalten.

65. a. **Konstruktion der Tafeln.** Um derlei „Massentafeln für Klötze nach Längen und Oberstärken“ zu konstruieren, kubiert man eine thunlichst grosse Anzahl von Blochen von gleicher Länge und gleichem Zopfdurchmesser nach dem sektionsweisen Verfahren, addiert die gefundenen Inhalte und dividiert die so erhaltene Summe

schliesslich durch die Anzahl der gemessenen Bloche. Auf diese Weise erhält man den durchschnittlichen Inhalt eines Klotzes von der gegebenen Länge und Oberstärke.

Durch Ausdehnung dieses Verfahrens auf alle vorkommenden Längen und Oberstärken können Zahlenwerte gewonnen werden, welche, in Tabellen entsprechend aneinandergereiht, den Inhalt je eines Bloches von bestimmter Länge und Oberstärke rasch auffinden lassen.

Je nachdem aber der durchschnittliche Inhalt der Klötze aus einer grösseren oder kleineren Anzahl von Einzelkubierungen abgeleitet wurde, werden die in der Tafel zusammengetragenen Inhalte mit grösseren oder kleineren Fehlern behaftet sein müssen, was schon daran zu erkennen ist, dass die Differenzen der aufeinanderfolgenden Inhalte keinem bestimmten Gesetze folgen (siehe die untenstehende Tabelle), sondern im Gegenteil ein ziemlich gesetzloses Auf- und Abschwanken der Kubikinhalte erkennen lassen.

Oberstärke cm	Länge m	Inhalt m³	Differenz m³
38		0.427	
39		0.449	0.022
40		0.473	0.024
41	3.4	0.497	0.024
42		0.519	0.022
43		0.545	0.026
44		0.563	0.018
45		0.591	0.028

Die so entstandenen Fehler können durch die sogen. graphische Interpolation ausgeglichen werden. Zu diesem Behufe werden auf der Achse AX (siehe Fig. 32) in äquidistanten Abständen die Zopfstärken der untersuchten Klötze aufgetragen, in den so entstandenen Teilungspunkten senkrechte Linien errichtet, auf welchen man nach einem schicklich gewählten Massstabe die den Zopfstärken zugehörigen Inhalte je eines Klotzes, die in der oben beschriebenen Weise gefunden wurden, aufträgt. Man erhält solchergestalt die Punkte XXX, XXXI, XXXII u. s. w., welche, miteinander verbunden, einen gebrochenen Linienzug gewinnen lassen, der sich aber in eine gesetzmässig verlaufende Linie umwandelt, wenn man unter Vermeidung der Aus- und Einsprünge thunlichst in dem Verlaufe des vorhandenen Linienzuges eine neue Kurve zieht. In den Schnittpunkten der neuerhal-

tenen Kurve mit den Senkrechten, bezw. in dem Abstande dieser Schnittpunkte von der Achse ergeben sich naturgemäss die korrigierten Klotzinhalte.

Hierzu wäre nur noch zu bemerken, dass die Inhalte um so genauer erhalten werden, aus einer je grösseren Anzahl von Einzel-

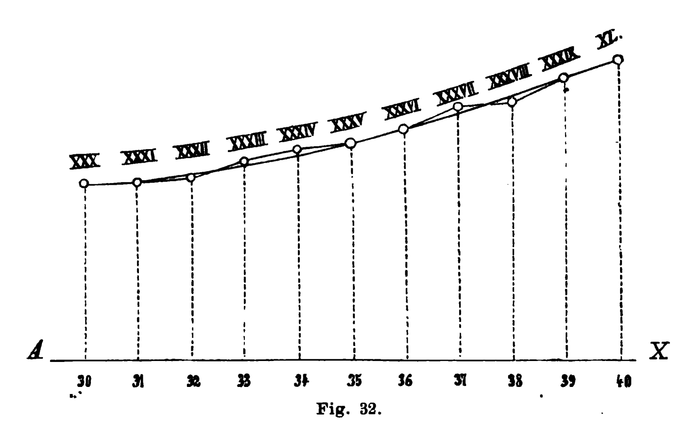


Fig. 32.

beobachtungen dieselben hervorgegangen sind; daher werden auch bei der graphischen Interpolation namentlich jene Punkte für die Festlegung der korrigierten Kurve zu berücksichtigen sein, deren richtige Lage durch eine genügend grosse Anzahl von Einzelkubierungen garantiert erscheint.

66. b. **Tafelwerke.** Tafeln, welche den durchschnittlichen Masseninhalt der Bloche nach Zopfstärke und Länge angeben, wurden auf Veranlassung der österreichischen, sächsischen und hannöverschen Staatsforstverwaltung von Salvadori, Kunze und Burckhardt verfasst.

Die von Salvadori entworfenen „tyrolischen“ Tafeln stützen sich auf die Kubierung von 120 000 Blochen, die auf verschiedenen Gebirgsformationen erwuchsen und Beständen angehörten, die in einer Meereshöhe von 1000—1500 Meter stockten. Davon entfielen 90 % auf die Fichte, 6 % auf die Lärche und 4 % auf die Tanne.

Die Kunze'schen Tafeln basieren sich auf die sektionsweise Kubierung von 25 909 Fichten- und 12 270 Kieferblochen, wobei zu bemerken ist, dass im Königreiche Sachsen der grösste Teil des Schaftes zu Klotzholz ausgehalten zu werden pflegt.[1]

---

[1] Kunze, „Massentafel für Nadelholzklötze nach Oberstärke“. Dresden 1870. I. Band, 1. Abt., Taf. 3.

Massentafel

für Nadelholz-Bloche nach Länge und Oberstärke.

(Tyrolische Tafel von Salvadori.)

Oberstärke cm	Klotzlänge in Metern					Oberstärke cm	Klotzlänge in Metern				
	4	4.2	4.5	4.7	5		4	4.2	4.5	4.7	5.
	Masse in Festmetern						Masse in Festmetern				
20	0.15	0.16	0.18	0.20	0.22	46	0.75	0.79	0.83	0.88	0.94
21	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	47	0.78	0.82	0.87	0.92	0.98
22	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	48	0.81	0.85	0.91	0.96	1.02
23	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	49	0.84	0.88	0.95	1.00	1.06
24	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	**50**	0.87	0.91	0.99	1.04	1.10
25	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	51	0.90	0.95	1.03	1.08	1.14
26	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	52	0.93	0.99	1.07	1.12	1.18
27	0.28	0.30	0.32	0.34	0.36	53	0.97	1.03	1.11	1.16	1.22
28	0.30	0.32	0.34	0.36	0.38	54	1.01	1.07	1.15	1.20	1.26
29	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40	55	1.05	1.11	1.19	1.24	1.31
30	0.34	0.36	0.38	0.40	0.42	56	1.09	1.15	1.23	1.28	1.36
31	0.36	0.38	0.40	0.42	0.45	57	1.13	1.19	1.27	1.32	1.41
32	0.38	0.40	0.42	0.44	0.48	58	1.17	1.23	1.31	1.36	1.46
33	0.40	0.42	0.44	0.47	0.51	59	1.21	1.27	1.35	1.41	1.51
34	0.42	0.44	0.47	0.50	0.54	**60**	1.25	1.31	1.39	1.46	1.56
35	0.44	0.46	0.50	0.53	0.57	61	1.29	1.35	1.43	1.51	1.61
36	0.46	0.49	0.53	0.56	0.60	62	1.33	1.39	1.48	1.56	1.66
37	0.48	0.52	0.56	0.59	0.63	63	1.37	1.43	1.53	1.61	1.71
38	0.51	0.55	0.59	0.62	0.66	64	1.41	1.47	1.58	1.66	1.76
39	0.54	0.58	0.62	0.65	0.69	65	1.45	1.51	1.63	1.71	1.81
40	0.57	0.61	0.65	0.68	0.72	66	1.49	1.56	1.68	1.76	1.86
41	0.60	0.64	0.68	0.71	0.75	67	1.53	1.61	1.73	1.81	1.91
42	0.63	0.67	0.71	0.74	0.78	68	1.57	1.66	1.78	1.86	1.97
43	0.66	0.70	0.74	0.77	0.82	69	1.61	1.71	1.83	1.91	2.03
44	0.69	0.73	0.77	0.80	0.86	**70**	1.66	1.76	1.88	1.96	2.09
45	0.72	0.76	0.80	0.84	0.90	71	1.71	1.81	1.93	2.01	2.15

Die hannöverschen Tafeln endlich wurden vom Forstdirektor H. Burckhardt[1]) verfasst und beziehen sich ihre Zifferreihen gleichfalls auf Fichte und Kiefer. Sie können aber auch für jede einzelne dieser beiden Holzarten gebraucht werden, wenn man von den in der Tabelle eingetragenen Inhalten bei der Fichte einen Abzug und bei der Kiefer einen Zuschlag macht, über dessen Grösse die Tafeln gleich-

[1]) H. Burckhardt, „Die Fichte und Kiefer in Bezug auf Form, Sortiment und Inhalt". Hannover 1856.

falls Aufschluss geben. Die hannöverschen Tafeln haben jedoch nur dann Gültigkeit, wenn sich die Ausformung des Klotzholzes nur auf die untere Hälfte des Schaftes beschränkt.

67. c. **Benutzung der Tafeln.** Es ist einleuchtend, dass bei der grossen Verschiedenartigkeit der Wuchsverhältnisse des Waldes die Form der Baumschäfte und somit auch jene der aus denselben erzeugten Klötze eine sehr verschiedene sein müsse, welche Verschiedenartigkeit zunächst in dem mehr oder weniger raschen Sinken der Durchmesser gegen das Zopfende hin und in dem grösseren oder kleineren Festgehalte derselben bei gleicher Länge und Oberstärke zum Ausdrucke kommt. Mit Oberstärketafeln werden sich sonach nur dann annähernd richtige Resultate erzielen lassen, wenn dieselben in Beständen gewonnen wurden, die rücksichtlich ihrer Formverhältnisse mit denjenigen übereinstimmten, für welche die Tafeln späterhin in Verwendung kommen sollen. Aber auch dann wird das Resultat ein um so richtigeres sein, eine je grössere Anzahl von Kubierungen nach denselben bewirkt wird. Heutzutage ist jedoch dieses Kubierungsverfahren nur wenig mehr im Gebrauche, was auch völlig begründet ist.

B. Kubierung der Stangen aus Länge und Unterstärke.

68. Da die sektionsweise Einzelkubierung der zumeist in sehr grossen Mengen anfallenden Stangen einen im Verhältnisse zu ihrer Geringwertigkeit allzugrossen Zeitaufwand erfordern würde, bedient man sich, um den Festgehalt von Stangen zu bestimmen, der sogenannten „Massentafeln für Stangen nach Länge und Unterstärke", welche die Masseninhalte von je 100 oder 50 Stück Stangen, getrennt nach Längen und Unterstärken, enthalten.

Diese Tafeln werden unter Anwendung des graphischen Interpolationsverfahrens in einer den Oberstärketafeln für Klotzholz ganz konformen Weise konstruiert und enthalten demnach ebenso wie diese nur Mittelwerte.

Als „Unterstärke" wurden in den verschiedenen Staaten verschieden weit vom Abhiebspunkte gelegene Durchmesser aufgefasst. Während beispielsweise in Preussen die Unterstärke in 1 m Abstand vom Stockabschnitte gemessen wurde, galt in Sachsen bisher die Vorschrift, dieselbe bei 0·1 m vom Stockabschnitte abzugreifen. Offenbar ist das weitere Hinaufrücken des Messpunktes für die Unterstärke insofern

Massentafel für Fichtenstangen nach Unterstärke.

(Der Messpunkt liegt 0.1 m über dem Abhiebe, bei den stärkeren Sortimenten jedenfalls oberhalb des ersichtlichen Wurzelanlaufes.)

Länge in Meter	Unterstärke in Centimetern						
	2	3	4	5	6	7	8
	100 Stück Stangen haben Festmeter						
1	0.02	.	.	.	.	.	.
2	0.04	0.08	0.14	0.22	.	.	.
3	0.05	0.12	0.21	0.33	0.46	0.62	.
4	0.07	0.16	0.29	0.44	0.62	0.82	1.05
5	0.08	0.20	0.36	0.55	0.77	1.03	1.31
6	.	0.24	0.43	0.66	0.93	1.24	1.57
7	.	0.28	0.50	0.77	1.08	1.44	1.83
8	.	.	0.57	0.88	1.24	1.65	2.09
9	.	.	0.64	0.99	1.39	1.85	2.36
10	.	.	.	1.10	1.55	2.06	2.62
11	.	.	.	.	1.70	2.26	2.88
12	.	.	.	.	1.86	2.47	3.14

Länge in Meter	Unterstärke in Centimetern						
	9	10	11	12	13	14	15
	100 Stück Stangen haben Festmeter						
4	1.29	.	.	.	.	.	.
5	1.61	.	.	.	.	.	.
6	1.93	2.31	2.70	.	.	.	.
7	2.25	2.69	3.15	3.62	4.09	.	.
8	2.57	3.08	3.60	4.13	4.67	.	.
9	2.90	3.46	4.05	4.65	5.25	.	.
10	3.22	3.85	4.50	5.17	5.84	6.51	7.18
11	3.54	4.23	4.95	5.68	6.42	7.16	7.90
12	3.86	4.62	5.40	6.20	7.01	7.81	8.62
13	4.18	5.00	5.85	6.72	7.59	8.47	9.33
14	4.50	5.39	6.30	7.23	8.17	9.12	10.05
15	.	5.77	6.75	7.75	8.76	9.77	10.77
16	.	6.16	7.20	8.27	9.34	10.42	11.49
17	.	.	.	8.78	9.93	11.07	12.21
18	.	.	.	.	10.51	11.72	12.93
19	.	.	.	.	.	12.37	13.64
20	.	.	.	.	.	13.02	14.36

von Vorteil, als hierdurch der Einfluss der Wurzelanläufe, der sich bei verschiedenen Stangen in verschieden hohem Grade äussert, paralysiert wird. Dies ist auch der Grund, weshalb der Verein forstlicher Versuchsanstalten ein für allemal beschlossen hat, bei der Bearbeitung von Massentafeln für Stangenhölzer die Unterstärke bei 1 m oberhalb der Abhiebsfläche zu messen.

Druck von Hesse & Becker in Leipzig.